PHY 3070
RELATIVITÉ 2
EXAMEN FINAL

Professeur: Paul Charbonneau
Date de l'examen: 26 au 28 avril 2021
Durée de l'examen: 48 heures

Examen à livre ouvert, toutes ressources permises, sauf ressources humaines autre que votre propre personne personnelle (et méfiez-vous particulièrement de ce que vous trouvez sur l'internet, particulièrement quand ça tombe sur la cosmologie ou les trous noirs!). En apposant votre signature ci-dessous, vous vous engagez sur l'honneur à respecter à la fois l'esprit et la lettre de cette directive. Remettez-moi un scan de la première page de ce questionnaire signé ici avec vos solutions.

Votre signature:

Sauf entente spécifique, l'examen doit m'être remis en version pdf sur Studium le mercredi 28 avril avant 12:00 (midi). Il peut évidemment m'être remis plus tôt si vous le préférez.

Un examen de 48 heures allège grandement la pression temporelle associée à un examen classique. Par conséquent, je m'attends à des copies d'examen écrites de manière lisible, au propre, et détaillant posément la logique suivie, les approximations utilisées, etc.

Bonne Chance! (...même si ce n'est pas vraiment une question de chance...)

Question 1 [15 points; Problème 31, verbatim]

On considère un espace 2D décrit par la métrique:

$$\mathrm{d}s^2 = y^2\mathrm{d}x^2 + x^2\mathrm{d}y^2 \ .$$

(a) Calculer la composante R_{xyxy} du tenseur de Riemann, la seule composante indépendante ici. Cet espace est-il courbe ?
(b) Répétez le calcul pour la métrique alternative suivante, et déterminez similairement si l'espace 2D correspondant est courbe ou non:

$$\mathrm{d}s^2 = y\mathrm{d}x^2 + x\mathrm{d}y^2 \ .$$

Question 2 [20 points; combo problèmes 25+27, quasi-verbatim]

Le but de ce problème est de vous faire calculer le temps (propre) de traversée d'un trou de ver le long d'une trajectoire radiale. L'intervalle invariant suivant décrit la géométrie spatiotemporelle dudit trou de vers:

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}r^2 + (b^2 + r^2)(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2)$$

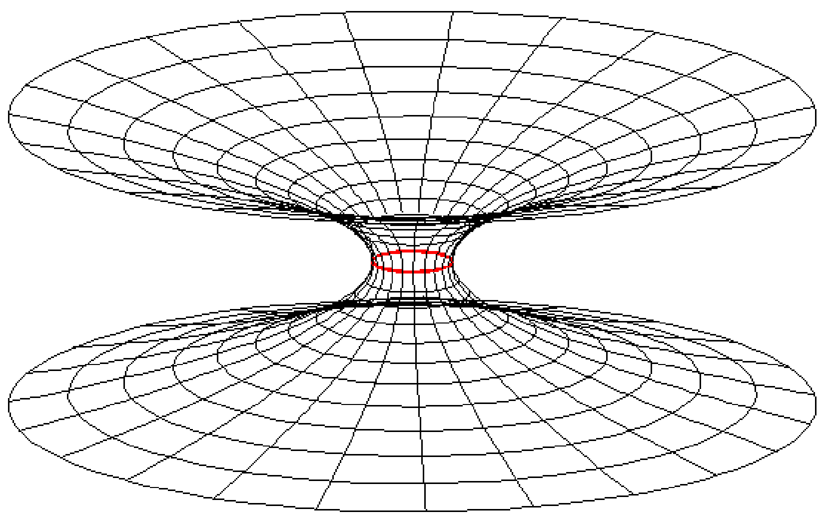

Figure 1: Une tranche dans l'hyperplan $[r, \phi]$ de la géométrie du trou de ver. Ici les cercles sont des lignes de coordonnées en ϕ, et les lignes leur étant perpendiculaire sont des lignes de coordonnées en r, i.e., des trajectoires radiales. Le plus petit cercle (trait épais) au centre de la structure correspond à la ligne $r = 0$ dans l'hyperplan (Question 2).

La Figure 1 ci-dessous présente une "tranche" 2D dans le plan $[r, \phi]$, visualisée ici en 3D mais reprojetée sur le plan (2D) de la feuille.

(a) Déduisez la forme du tenseur métrique correspondant à l'intervalle invariant ci-dessus, et écrivez le Lagrangien pour cette métrique;

(b) Développez la composante-r de l'équation de Lagrange, en n'oubliant pas que $L = \mathrm{d}\tau/\mathrm{d}\sigma$;

(c) Developpez la composante-r de l'équation géodésique, mais sans évaluer explicitement les coefficients de connexion en fonction du tenseur métrique;

(d) Par comparaison de vos résultats en (b) et (c), déduisez la forme des coefficients $\Gamma^r_{\alpha\beta}$ $(\alpha, \beta = t, r, \theta, \phi)$;

(e) Supposez que vous êtes situé(e) à une distance radiale $r = d$ au dessus du centre du trou de ver, vous dirigeant vers lui à une vitesse U le long d'une trajectoire radiale ($r = 0$ est ici le centre du trou de ver, soit au centre de la Figure 1, dans la partie la plus étroite du trou). Par intégration d'une équation différentielle pertinente pour $r(\tau)$, calculez le temps (propre) requis pour passer à une position $r = -d$ de l'autre coté du trou de ver;

(f) Durant cet intervalle de temps propre, de combien aurait vieilli un(e) observateur(e) situé(e) à grande distance du trou de vers ? Que doit-on entendre par "grande distance" ici ?

Question 3 [15 points; problème 40, verbatim]

On considère un Univers de courbure positive tel que décrit par la métrique de Robertson-Walker-Friedmann avec $k = +1$, avec matière non-relativiste et sans radiation, et incluant une densité d'énergie du vide associée à une constante cosmologique $\Lambda \neq 0$.

(a) Démontrez que pour une valeur donnée de Λ, il existe une valeur de la densité ρ pour laquelle le facteur d'échelle demeure constant dans le temps.

(b) Comment la grandeur de Λ affecte-t-elle le volume de cet Univers statique ?

(c) Calculez l'évolution temporelle du facteur d'échelle $a(t)$ si la densité diffère très légèrement de la valeur trouvée en (a) (soit plus grande, soit plus petite). Qu'en concluez vous par rapport à la stabilité de l'Univers statique d'Einstein ?

Cet Univers statique d'Einstein a été caractérisé par son illustre auteur comme la plus grande gaffe de sa vie...

Question 4 [15 points; problème 49, verbatim]

Nous avons vu à la §8.4.7 des Notes de cours comment le mécanisme dit de Penrose permet d'extraire de l'énergie d'un trou noir en rotation. Il s'avère que les trajectoires d'énergie négative sont toutes rétrogrades; par conséquent, leur capture extrait également du moment cinétique du trou noir, réduisant inexorablement J, donc le volume de l'ergosphère, dont l'existence est essentielle au mécanisme de Penrose. L'extraction d'énergie ne peut donc seulement se poursuivre jusqu'à ce que $J = 0$. Ceci pose une limite fondamentale à la quantité d'énergie qui peut être extraite d'un trou noir, indépendamment de tout aspect technologique du processus (viz. Fig. 8.10 des Notes). Il s'agit ici de calculer cette limite.

Il s'avère qu'un théorème, dû à Stephen Hawkins (1942–2018), permet de calculer assez facilement la limite en question. Ledit théorème stipule qu'un trou noir absorbant de la masse-énergie de son "environnement" (soit le volume extérieur à son horizon) ne peut, ce faisant, qu'augmenter la surface de son horizon, et jamais la diminuer (il existe en fait ici une analogie profonde avec l'entropie). Allons-y par étapes:

(a) Calculez la surface de l'horizon d'un trou noir de masse M et moment cinétique J.

(b) Calculez la masse d'un trou noir de Schwarzschild (sans rotation) ayant la même surface d'horizon que pour votre trou noir de Kerr en (a), si ce dernier est à la limite de rotation maximale $J = M^2$.

(c) Invoquez $E = mc^2$ (Caramba!) et vos résultats en (a) et (b) pour calculer cette fameuse fraction de l'énergie de masse du trou noir initial en rotation rapide qui peut être extraite par tout mécanisme de type Penrose.

Question 5 [25 points; enfin du nouveau!]

La détection des ondes gravitationelles émises lors de la coalescence de deux trous noirs offre un laboratoire particulièrement intéressant pour l'étude de la gravité en régimes de très grande courbure. Ce petit problème vise à vous faire explorer (quantitativement) la possibilité (ou pas) de mesurer la constante cosmologique dans un tel contexte.

Il s'agit tout d'abord de reprendre la dérivation de la métrique de Schwarzschild (débutant à l'éq. (8.8) des Notes de cours), mais en incluant cette fois la constante cosmologique dans l'équation du champ d'Einstein, soit sa forme donnée par l'éq. (5.106). Suggestion: remplacez le Λ dans (8.7) par un lambda minuscule ("λ") pour éviter toute malencontreuse confusion avec la constante cosmologique Λ dans (5.106) !

(a) Obtenez les équivalents des équations (8.12) et (8.17), et montrez qu'à partir de ces expressions la forme finale de la métrique de Schwarzschild devient:

$$\mathrm{d}s^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3}\right)\mathrm{d}t^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3}\right)^{-1}\mathrm{d}r^2 + r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\phi^2)\ ,$$

plutôt que (8.21).

(b) Calculez les coefficients de connexion non-nuls pour la métrique en (a)

(c) Placez vous dans le plan équatorial ($\theta = \pi/2$) et développez les composantes t, r et ϕ des équations géodésiques. Relire posément la section 4.3.5 des Notes de cours pourrait être une bonne idée avant de commencer.

(d) Modifiez maintenant le code Python de la Figure 4.5 en y introduisant la nouvelle forme de vos équations différentielles obtenues en (c). Conservant les valeurs $\ell = 4.3$ et $e = 0.9716$ déjà fixée dans le code de la Fig. 4.5, assurez vous tout d'abord qu'avec $\Lambda = 0$ vous retrouvez bien l'orbite de la Figure 4.6.

(e) Conservant les mêmes valeurs de ℓ et e pour la suite, il s'agit maintenant de calculer une série d'orbites avec des valeurs de Λ non-nulles. Déterminez à partir de quelle valeur de Lambda la précession de l'orbite (avancée angulaire du périastre d'un périastre au suivant, comme indiqué sur la Figure 4.6) diffère par plus d'un degré de l'orbite de référence pour $\Lambda = 0$.

(f) En supposant que ce seuil de 1 degré dans la précession du périastre soit la limite détectable sur la base de la forme du train d'ondes gravitationnelles émis lors de la coalescence (voir Fig, 6.3 au besoin), croyez vous que cette approche offre une contrainte utile sur la grandeur et/ou le signe de la constante cosmologique ? Pourquoi ?

Question 6 [10 points; enfin du nouveau!]

Le trou noir *Gargantua* du film *Interstellar* est un trou noir très massif et en rotation vraiment très, très rapide: $M/M_\odot = 10^8$ et $a/M = 1 - 10^{-14}$, selon ce qu'en dit Kip Thorne au chapitre 6 de son bouquin *The Science of Interstellar* (W.W. Norton &co, 2014; excellente lecture d'été!).

Considérons une simplification de la chute de l'astronaute Cooper vers *Gargantua*, en remplaçant Cooper et sa navette par une très longue tige élastique et flexible, orientée radialement et tombant en chute libre le long d'une trajectoire radiale contenue dans le plan équatorial. Contrairement au film, on supposera que l'astronaute Brandt observe la chute d'un point situé à très grande distance *le long de l'axe de rotation* de Gargantua. Décrivez la déformation (ou pas) de la tige telle qu'observée par Brandt,

(a) avant l'entrée de la tige dans l'ergosphère;
(b) durant sa traversée de l'ergosphère; et
(c) une fois l'horizon franchi.

Justifiez bien vos réponses. Maximum une page de texte, calculs formels non-requis mais certainement permis, petits dessins et diagrammes en option mais encouragés (et non-comptabilisées dans le maximum d'une page pour le texte).

Le Professeur:

Le Répondant:

Le Directeur: