PHY 1441
ÉLECTROMAGNÉTISME
DEVOIR 3

Distribué le: 13 février 2007
À remettre le: Mardi 13 mars avant 10:00 dans le casier à devoirs

---

Question 1

Une coquille cylindrique de rayon R et infiniment longue est maintenue par une source externe à un potentiel électrostatique donné par l'expression $\varphi(\phi) = \varphi_0 \sin(4\phi)$; Solutionner l'équation de Laplace à l'extérieur du cylindre ($s > R$). Vous pouvez débuter avec la solution générale de l'équation de Laplace en coordonnées cylindriques avec $\partial/\partial z = 0$, calculée au TP-3 comme étant

$$\varphi(s, \phi) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(C_m s^m + D_m s^{-m}\right) \left(A_m \sin(m\phi) + B_m \cos(m\phi)\right) \ .$$

Question 2

Supposons que les plaques d'un condensateur à plaques parallèles s'approchent l'une de l'autre d'une distance infinitésimale ϵ, en raison de leur attraction mutuelle;

(a) Calculez le travail effectué par la force électrostatique, en terme du champ électrique E entre les plaques, et de leur surface A.
(b) D'où vient l'énergie requise pour fournir le travail calculé en (a)?

Question 3

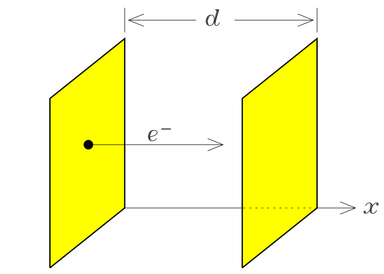
Un cylindre de rayon R et de longueur infinie porte une charge électrique distribuée sur sa surface extérieure (densité surfacique σ). Calculez la densité de courant pour les deux situations suivantes:

(a) Le cylindre se déplace à vitesse v dans une direction parallèle à son axe de symétrie.
(b) Le cylindre tourne autour de son axe de symétrie à une vitesse angulaire ω.
(c) Répétez les calculs en (a) et (b), en supposant cette fois que la charge est distribuée uniformément dans le volume du cylindre (densité volumique ρ).

Question 4

Dans une diode à vide (vieille technologie...), les électrons (e^-) sont "émis" en chauffant une **cathode**, au potentiel zéro, et accéléré sur une distance d séparant la cathode de l'**anode**, cette dernière étant maintenue à un potentiel fixe φ_0 (voir Figure 4). Le nuage d'électron en mouvement croit jusqu'à ce qu'il ait réduit à zéro le champ électrique à la surface de la cathode. A partir de ce moment le système est dans un état stationnaire, où un courant constant I existe entre la cathode à l'anode. Pour les fins du calcul suivant, vous pouvez supposer que les dimensions des plaques formant la cathode et l'anode sont beaucoup plus grandes que leur séparation d, de façon telle que toutes les variables du problème peuvent être considérées comme des fonctions de x seulement.

Figure 4



(a) Écrivez l'équation de Poisson telle qu'elle s'applique à la région située entre l'anode et la cathode.

(b) En supposant que les électrons partent de la cathode au repos ($\mathbf{v} = v_x \hat{\mathbf{x}} = 0$), quelle est leur vitesse à une distance x où le potentiel est $\varphi(x)$?

(c) Une fois l'état stationnaire atteint, le principe de conservation de la charge implique que le courant I est indépendant de x; quelle relation ceci implique-t-il entre la densité volumique de charge $\rho(x)$ et la vitesse $v(x)$ des électrons?

(d) Utilisant vos résultat en (a), (b) et (c), obtenez une équation différentielle ordinaire pour φ en fonction de x, et où d et φ_0 peuvent apparaitre, mais pas v ou ρ.

(e) Solutionnez l'équation différentielle obtenue en (d), et comparez ceci au profile $\varphi(x)$ attendu en l'absence de charges entre l'anode et la cathode. Utilisez votre solution pour reconstruire les profils $v(x)$ et $\rho(x)$.

(f) Démontrez finalement que $I = K\,\varphi_0^{3/2}$, et déterminez la constante K. C'est la "Loi de Child-Langmuir", qui, soit dit en passant, s'applique à des géométries autres que celle étudiée ici.

Question 5

La courroie d'un générateur van der Graf tourne à une vitesse linéaire de 5 m s^{-1}. Un balai électrostatique dépose une densité surfacique de charge $+\sigma$ à la base de la partie ascendante de la courroie, et un second balai dépose une densité surfacique $-\sigma$ au haut de la partie descendante de la courroie. La courroie a une demie-longueur de L, et une largeur ℓ.

(a) Si $L = 80\,\text{cm}$, $\ell = 5\,\text{cm}$ et $\sigma = 10^{-7}\,\text{C m}^{-2}$, quel est le courant électrique net, (mesuré en Ampère) circulant entre le bas et le haut du générateur?

(b) La capacité C d'une coquille sphérique conductrice simple est donnée par la relation $C = 4\pi\varepsilon_0 a$, où a est le rayon de la coquille (ceci est équivalent à la capacité d'un système de deux coquilles concentriques, dans lequel le rayon de la coquille extérieure tend vers l'infini). En supposant que le dôme du générateur peut être approximé par une telle coquille, obtenez une équation différentielle décrivant la variation du potentiel électrostatique du dôme, $\varphi(t)$, en fonction du temps.

(c) Utilisez votre réponse en (b) pour estimer le temps requis pour que le dôme du générateur atteigne un potentiel de $5 \times 10^4\,\text{V}$, en supposant que le dôme ait un rayon $a = 15\,\text{cm}$.