DEVOIR NUMÉRIQUE §5 - MÉTHODE DE CORRECTION EN TEMPÉRATURE DE LUCY-UNSÖLD

[Dans ce qui suit, τ_P correspond à une couche donnée] Comme nous l'avons vu dans le cours, la méthode de correction en température de Lucy-Unsöld nous donnait

$$\Delta T(\tau_P) = \frac{\pi}{4\sigma T^3}\,\Delta B(\tau_P)$$

où

$$\Delta B(\tau_P) = -\frac{d\,\Delta H(\tau_P)}{d\tau_P} + \frac{\kappa_J}{\kappa_P}\left[3\int_0^{\tau_P} \frac{\chi_F}{\kappa_P}\Delta H(\tau')\,d\tau' + 2\,\Delta H(0)\right] \quad .$$

Puisque $\Delta H(\tau_P) = H - H(\tau_P)$ où $H = \sigma T_{\rm eff}^4/4\pi$, le premier terme de cette équation peut se récrire

$$-\frac{d\,\Delta H(\tau_P)}{d\tau_P} = \frac{dH(\tau_P)}{d\tau_P} = \frac{\kappa_J}{\kappa_P}J(\tau_P) - B(\tau_P)$$

et alors nous obtenons

$$\Delta B(\tau_P) = \frac{\kappa_J}{\kappa_P}\left[J(\tau_P) + 3\int_0^{\tau_P} \frac{\chi_F}{\kappa_P}\Delta H(\tau')\,d\tau' + 2\,\Delta H(0)\right] - B(\tau_P) \quad .$$

L'intégrale peut être transformée en posant

$$d\tau_P = -\kappa_P\,dz = \frac{\kappa_P}{\rho}\frac{dP}{g}$$

et on obtient sous sa forme finale

$$\Delta B(\tau_P) = \frac{\kappa_J}{\kappa_P}\left[J(\tau_P) + 3\int_0^{P} \frac{\chi_F}{\rho}\Delta H(\tau')\,\frac{dP'}{g} + 2\,\Delta H(0)\right] - B(\tau_P) \quad .$$

Pour évaluer cette expression, on doit donc calculer κ_J, κ_P, et χ_F à partir de leurs définitions respectives (en faisant *bien attention* à la différence entre κ_ν et χ_ν)

$$\kappa_J = \frac{\int_0^\infty \kappa_\nu J_\nu\,d\nu}{J(\tau_P)} \quad \text{avec} \quad J(\tau_P) = \int_0^\infty J_\nu\,d\nu$$

$$\kappa_P = \frac{\int_0^\infty \kappa_\nu B_\nu\,d\nu}{B(\tau_P)} \quad \text{avec} \quad B(\tau_P) = \int_0^\infty B_\nu\,d\nu$$

$$\chi_F = \frac{\int_0^\infty \chi_\nu H_\nu\,d\nu}{H(\tau_P)} \quad \text{avec} \quad H(\tau_P) = \int_0^\infty H_\nu\,d\nu$$

et on doit aussi calculer $B(\tau_P)$, $J(\tau_P)$, et $H(\tau_P)$ à partir de la solution de l'équation de transfert radiatif.

On doit faire attention ici au calcul de $H(\tau_P)$ et χ_F car le flux monochromatique d'Eddington H_ν est connu aux demies-couches seulement, c.-à-d. $H_{d-\frac{1}{2}}$, sauf à la première couche. On estimera donc ce flux monochromatique (et l'opacité correspondante) aux différentes couches de la manière suivante (sauf à la première couche évidemment)

$$H_\nu(d) = \frac{H_\nu(d-\frac{1}{2}) + H_\nu(d+\frac{1}{2})}{2}$$

Enfin, comme cette procédure de correction en température est une correction du premier ordre, le ΔT trouvé est généralement trop grand, et pour stabiliser la procédure on doit diviser cette correction par un certain facteur. Je vous suggère d'utiliser

$$\Delta T = \Delta T/3 \quad .$$

Une fois la correction en température appliquée, vous devez réintégrer l'équation d'équilibre hydrostatique

---

Problème 1

Calculez un modèle d'atmosphère non-gris avec les paramètres suivants

1) $\tau_1 = 10^{-8}$

2) $\tau_{\rm ND} = 10^2$

3) $T_{\rm eff} = 10,000$ K

4) $\log g = 4.0$

5) ND $= 50$

Le modèle doit être convergé tel que $\Delta T/T < 10^{-3}$ et $\Delta H/H < 10^{-3}$ *à toutes les couches* du modèle. Présentez le résultat sous la forme d'un tableau contenant les valeurs de τ, $T(\tau)$, $P(\tau)$, $\Delta T/T$, et $\Delta H/H$ pour chaque valeur de τ du modèle convergé. Donnez aussi le nombre d'itérations requis pour atteindre ce critère de convergence.

Problème 2

Comparez sur une même figure les structures grises et non-grises du modèle (c.-à-d., $T(\tau)$ en fonction de $\log\tau$ pour les modèles gris et non-gris).

Problème 3

Montrez *sur un même graphique* l'erreur sur la température $\Delta T/T$ en fonction de $\log \tau$ pour toutes les itérations de la procédure de correction.

Problème 4

Montrez *sur un même graphique* l'erreur sur le flux total en fonction de $\log \tau$ tel que défini dans le devoir précédent pour toutes les itérations de la procédure de correction.

Problème 5

Montrez *sur un même graphique* la condition d'équilibre radiatif normalisée en fonction de $\log \tau$ tel que défini dans le devoir précédent pour toutes les itérations de la procédure de correction.
