Calcul des populations et équation d'état ETL

Nous voulons, pour un T et P_g donné (connue), calculer la population de chacune des espèces qui composent le plasma (e^-, ions, atoms).

Equation d'état d'un gaz parfait : $\underset{[\mathrm{dyn/cm^2}]}{P_g} = \underset{[\mathrm{cm^{-3}}]}{N} k_B T$

k_B : constante de Boltzmann $= 1.38046 \times 10^{-16}$ erg/K

où $N = (N_{noyaux} + N_e)$ (atomes, ions)

autrement dit, il faut trouver la population des différents atomes et ions pour un T et P_g donné.

Cas simple : exercice en classe → gaz d'Hydrogène (pas de H^-)

→ trouver N_e ...

Exemple des notes de cours : gaz d'hydrogène, tenir compte de H^-

réaction considérées :

$$H \rightleftharpoons \underset{\text{proton}}{H^+} + e^-$$

$$H^- \rightleftharpoons H + e^-$$

conditions à satisfaire : la formation de H^- retire des e^- libres du plasma.

Neutralité ⟹ $N_e = N_{H+} - N_{H-}$ ①

conservation des noyaux ⟹ $N_{noyaux} = (N_{TOT} - N_e)$ ②, avec $N_{TOT} = P_g/kT$

$= N_H + N_{H+} + N_{H-}$ ③

On ne connait pas N_e (c'est ce que l'on cherche!)

Une fois N_e déterminé, les autres quantités sont facilement obtenues à partir de Saha et Boltzmann.

$$N_e = ?$$

$$= \frac{N_e}{N_{noyaux}} \cdot N_{noyaux} = \frac{eq\ 1}{eq\ 3} \cdot eq\ 2$$

$$N_e = \frac{(N_{TOT} - N_e) \cdot (N_{H^+} - N_{H^-})}{N_H + N_{H^+} + N_{H^-}}$$

On divise par N_{H^+} en haut et en bas:

$$N_e = (N_{TOT} - N_e) \left[\frac{1 - \frac{N_{H^-}}{N_{H^+}}}{1 + \frac{N_H}{N_{H^+}} + \frac{N_{H^-}}{N_{H^+}}} \right]$$

$$\text{Saha: } \frac{N_j}{N_{j+1}} = N_e \cdot \underbrace{\frac{U_j(T)}{U_{j+1}(T)} \underset{2.07\times10^{-16}}{C_I} T^{-3/2} \exp\left(\frac{\overbrace{\chi_{I_j} - \chi_{i_j}}^{\substack{= 13.6\,eV \text{ pour } H \\ 0.754\,eV \text{ pour } H^-}}}{kT}\right)}_{\text{ne dépend que de } T}$$

$$\text{donc, } \frac{N_{H^-}}{N_{H^+}} = \underset{N_e\,\varphi(T)}{\frac{N_{H^-}}{N_H}} \cdot \underset{N_e\,\phi(T)}{\frac{N_H}{N_{H^+}}}$$

(voir notes p. 10)

$$N_e = (N_{TOT} - N_e)\left[\frac{1 - N_e \cdot N_e \cdot \Phi \cdot \varphi}{1 + N_e \Phi + N_e^2 \Phi \varphi}\right] \quad \left(= (N_{TOT} - N_e)\left[\frac{TPH}{BTH}\right]\right)$$

N_e dépend de N_e ! Equation non-linéaire en N_e.

On solutionne en utilisant la bonne vieille méthode de Newton-Raphson

[Exemple en Classe → Newton Raphson]

Une fois N_e trouvé, on peut déterminer les populations.

par exemple,
$$\frac{N_{H^+}}{N_{noyaux}} = \frac{N_{H^+}}{(N_{TOT} - N_e)} = \frac{N_{H^+}}{N_{H^+} + N_{H^+} + N_{H^-}} = \underbrace{\frac{1}{1 + \frac{N_H}{N_{H^+}} + \frac{N_{H^-}}{N_{H^+}}}}_{BTH}$$

$$N_{H^+} = \frac{N_{TOT} - N_e}{BTH}$$

et puisque N_e est maintenant connu, on peut calculer tout les termes

$$N_H = \frac{N_H}{N_{H^+}} \cdot N_{H^+}$$

$\frac{N_H}{N_{H^+}}$ ← Saha → $N_e \cdot \phi(T)$

$$N_{H^-} = \frac{N_{H^-}}{N_H} \cdot N_H$$

$\frac{N_{H^-}}{N_H} \propto N_e \cdot \varphi(T)$

Les populations des niveaux individuels de l'hydrogène sont obtenues par l'éq. de Boltzmann

$$\frac{N_H(n)}{N_H} = \frac{g_n}{U_H} \exp^{-\chi_n / kT} \quad (\text{eq. } 2.5)$$

Un exemple un peu plus complexe (à peine...)

considérons un gaz avec $H, H^-, H^+, e^-, He, He^+$, abondance : α_H, α_{He}

$$\left(\alpha_k \equiv \frac{N_k}{N_{noyaux}} \right)$$

réactions considérées :

$$H \rightleftharpoons H^+ + e^-$$

$$H^- \rightleftharpoons H + e^-$$

$$He \rightleftharpoons He^+ + e^-$$

conditions à satisfaire :

Neutralité $\Rightarrow N_e = N_{H^+} + N_{He^+} - N_{H^-}$ (1)

conservation des noyaux $\Rightarrow N_{noyaux} = (N_{TOT} - N_e)$ (2)

$$= \underbrace{N_H + N_{H^+} + N_{H^-}}_{N_{Hydrogène}} + \underbrace{N_{He} + N_{He^+}}_{N_{Helium}} \quad (3)$$

$$N_e = \frac{(1)\cdot(2)}{(3)} = (N_{TOT} - N_e)\left[\frac{N_{H^+} - N_{H^-}}{\underset{\substack{N_{hydrogene} \\ \alpha_H}}{(3)}} + \frac{N_{He^+}}{\underset{\substack{N_{Helium} \\ \alpha_{He}}}{(3)}} \right]$$

$$= (N_{TOT} - N_e)\left[\frac{\alpha_H (N_{H^+} - N_{H^-})}{N_H + N_{H^+} + N_{H^-}} + \frac{\alpha_{He}(N_{He^+})}{N_{He} + N_{He^+}} \right]$$

diviser en haut et en bas par N_{H^+} et N_{He^+}

$$N_e = (N_{TOT} - N_e)\left[\frac{\alpha_H \left(1 - \frac{N_{H^-}}{N_{H^+}} \right)}{\left(1 + \frac{N_H}{N_{H^+}} + \frac{N_{H^-}}{N_{H^+}} \right)} + \frac{\alpha_{He}(1)}{\left(1 + \frac{N_{He}}{N_{He^+}} \right)} \right]$$

$$N_e = (N_{TOT} - N_e)\left[\alpha_H \frac{TPH}{BTH} + \alpha_{He} \frac{TPHe}{BTHe} + \dots \alpha_Z \frac{TPZ}{BTZ} \right]$$