PHY 2215 - Physique thermique et statistique

Problèmes Chapitre 3

Problème 3.1

Un peu de débrouillardise :

a) Estimez le nombre de molécules d'air dans la salle de classe en faisant l'approximation du gaz idéal, $PV = \nu RT$ (ν est le nombre de moles et $R = 8.3143$ J K^{-1} mol^{-1} est la constante du gaz idéal).

b) Estimez la distance entre chaque molécule de l'air ambiant et comparez cette distance avec la taille typique d'une molécule d'air.

c) Calculez la probabilité que toutes les molécules d'air dans le classe se retrouvent spontanément, donc par pur hasard, dans une moitié seulement du volume total de la classe.

Problème 3.2

Une particule de masse m est libre de se déplacer dans un espace à une dimension. Notons la position de cette particule x et sa quantité de mouvement p_x. Supposez que cette particule soit confinée à l'intérieur d'une boîte tel que sa position se situe entre $x = 0$ et $x = L$, et que son énergie se situe entre E et $E+\delta E$. Dessinez l'espace de phase classique de ce système en indiquant la région de l'espace accessible à cette particule.

Problème 3.3

Considérez un système composé de deux particules possédant chacune une masse m et libres de se déplacer dans un espace à une dimension. Notons la position de ces particules x_1 et x_2 et leur quantité de mouvement p_1 et p_2. Ces particules sont confinées à l'intérieur d'une boîte tel que leur position se situe entre $x = 0$ et $x = L$, et leur énergie totale se situe entre E et $E + \delta E$. Comme il est difficile de dessiner un espace de phase à quatre dimensions, dessinez séparément l'espace de phase impliquant x_1 et x_2, et celui impliquant p_1 et p_2. Indiquez dans ces diagrammes la région de l'espace accessible à ces deux particules.

Problème 3.4

Considérez le problème d'un oscillateur harmonique simple à une dimension dont la position en fonction du temps est donnée par $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$. Si l'énergie de cet oscillateur se trouve entre E et $E+\delta E$, démontrez que la probabilité que la position de l'oscillateur se trouve entre x et $x + dx$ est donnée par

$$P(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}}$$

Indice : calculez le volume dans l'espace de phase quand l'énergie se situe entre E et $E+\delta E$ **et** quand la position se situe entre x et $x + dx$, et comparez ce volume au volume total quand l'oscillateur se trouve n'importe où, mais dans le même intervalle d'énergie.

(verso)

Problème 3.5

Considérez un système où les niveaux d'énergie sont régulièrement espacés. Prenons pour origine des énergies le niveau le plus bas et comme unité d'énergie la différence entre deux niveaux consécutifs. Supposons qu'une particule soit bleue (B), l'autre rouge (R) et la dernière jaune (J). Déterminez à l'aide d'un diagramme de combien de manières différentes ces trois particules peuvent conduire à une énergie totale de 3 unités.

Problème 3.6

Les niveaux d'énergie d'un oscillateur harmonique isotrope à trois dimensions sont donnés par l'expression

$$\epsilon_{n_x,n_y,n_z} = \left(n_x + n_y + n_z + \frac{3}{2}\right)\hbar\omega$$

où n_x, n_y et n_z sont des entiers positifs ou nuls.

a) Montrez que les niveaux d'énergie satisfont à la loi générale

$$\epsilon_n = \left(n + \frac{3}{2}\right)\hbar\omega$$

où n est un entier positif ou nul.

b) Calculez la dégénérescence des 5 premiers niveaux.

c) Déduisez des résultats précédents, et de ceux relatifs à l'oscillateur harmonique à une dimension, les niveaux d'énergie d'un oscillateur harmonique à 2 dimensions et le degré de dégénérescence des 5 premiers niveaux.

Problème 3.7

Une particule quantique est libre de se déplacer dans une boîte cubique de dimension L. Les états d'énergie d'une telle particule sont donnés par l'expression suivante :

$$\epsilon_i = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}\left(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2\right) \equiv \left(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2\right)\epsilon_0$$

où n_x, n_y et n_z sont trois nombres entiers positifs (non-nuls). Calculer la dégénérescence des 10 premiers niveaux d'énergie, c'est-à-dire le nombre de niveaux qui possèdent la même énergie, et tracer le diagramme en énergie correspondant.

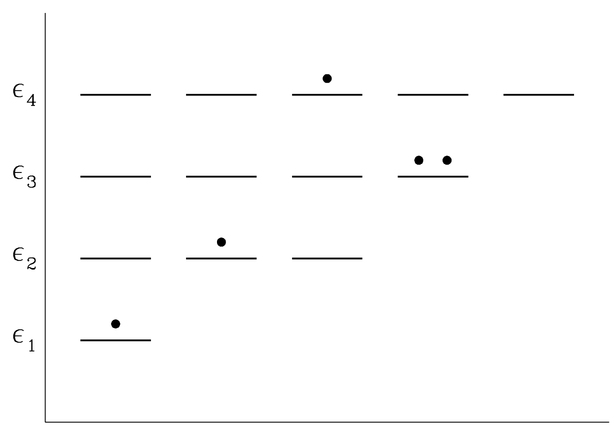
Problème 3.8

Considérez un grand nombre N de particules identiques localisées (c.-à-d. qu'elles ne bougent pas) plongées dans un champ magnétique H parallèle à l'axe z. Chaque particule possède un spin 1/2. Déterminez le nombre d'états accessibles au système en fonction du spin total résultant selon l'axe z, noté M_s. À partir de cette expression **et d'un calcul explicite**, déterminez la valeur de M_s pour laquelle le nombre d'états accessibles est maximum.

Note : les spins s'additionnent algébriquement. Vous noterez $N_\uparrow$ et $N_\downarrow$ le nombre de particules ayant un spin $+1/2$ et $-1/2$, respectivement (ainsi, $M_s = 0$ si $N_\uparrow = N_\downarrow$).

Problème 3.9

Un système possède 4 niveaux d'énergie ϵ_1, ϵ_2, ϵ_3, et ϵ_4 avec des dégénérescences respectives de 1, 3, 4, et 5, tel qu'illustré ci-dessous.



L'espacement entre tous les niveaux d'énergie est égal à ϵ_1, c'est-à dire que $\epsilon_2 = 2\epsilon_1$, $\epsilon_3 = 3\epsilon_1$, etc. Cinq particules *identiques* sont distribuées sur les différents niveaux d'énergie de ce système (tel qu'illustré en exemple ci-dessus) ; il n'y a pas de limite sur le nombre de particules occupant un état microscopique donné. On fixe l'énergie totale du système à $12\epsilon_1$. Déterminez le nombre total d'états microscopiques accessibles. [Réponse : 450]