FACULTÉ DES ARTS ET DES SCIENCES – DÉPARTEMENT DE PHYSIQUE

SIGLE DU COURS : PHY 1620 NOM DU PROFESSEUR : Pierre Bergeron

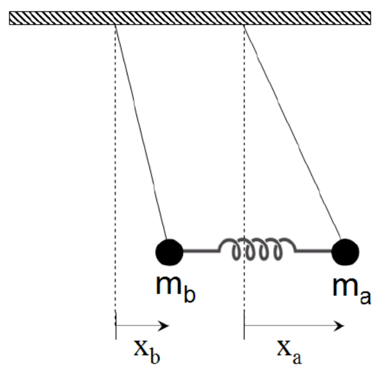
TITRE DU COURS : Ondes et vibrations

EXAMEN INTRA : DATE : 8 mars 2006 HEURE : 13 :30–15 :30 SALLE : Z–240

DIRECTIVES PÉDAGOGIQUES : **Aucune documentation ou calculatrice n'est permise, et vous devez répondre à toutes les questions.**

QUESTION 1 *Pendules couplés de masses différentes* (35 points)

Deux pendules simples de masses **différentes**, m_a et m_b, sont reliés par un ressort de constante de rappel k, tel qu'illustré ci-dessous.



a) Écrivez les équations du mouvement pour chacune des masses.

b) En utilisant la méthode du déterminant, déterminez les fréquences des modes normaux de ce système ainsi que les amplitudes relatives de chacun des modes.

c) Déterminez les solutions générales des équations du mouvement pour chacune des masses.

d) Démontrez que les vecteurs propres ne sont orthogonaux que si $m_a = m_b$.

e) Déterminez les coordonnées normales du système en passant par la matrice de transformation. Quelle est l'interprétation physique de chacune des coordonnées normales ?

f) On entretient maintenant le mouvement du pendule a par une force externe de la forme $F_0 \cos \omega t$. Pour quelles valeurs de la fréquence ω de cette force externe les amplitudes des pendules a et b seront-elles maximales ?

Sigle du cours : PHY 1620

QUESTION 2 *Oscillateur amorti et entretenu* (35 points)

Considérez un oscillateur harmonique simple de masse m avec une constante de rappel k qui subit un amortissement caractérisé par une constante d'amortissement γ, et entretenu par une force externe de la forme $F_0 \cos \omega t$.

a) Écrivez l'équation du mouvement de cet oscillateur.

b) Démontrez que l'expression $x(t) = A_0 e^{-\gamma t/2} \cos(\omega_a t + \alpha)$ avec $\omega_a^2 \equiv \omega_0^2 - \gamma^2/4$ est une solution de l'équation **homogène** du mouvement.

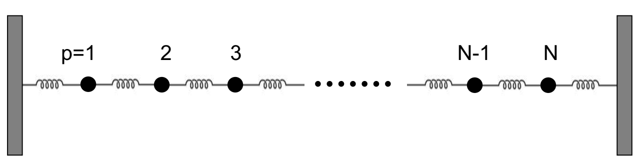
c) En supposant une solution complexe de la forme $z(t) = A(\omega)\, e^{i(\omega t - \delta)}$, déterminez les valeurs de $A(\omega)$ et $\delta(\omega)$ **en régime permanent**.

d) Écrivez la solution la **plus générale** du mouvement pour cet oscillateur amorti et entretenu.

e) Démontrez que si l'amortissement est négligeable ($\gamma = 0$), la solution générale de l'équation du mouvement donne lieu à un phénomène de battement (vous pouvez supposer $x_0 = v_0 = 0$).

QUESTION 3 *Oscillateurs couplés à plusieurs composantes* (30 points)

On s'intéresse aux oscillations **longitudinales** d'un ensemble de N plombs de masse m reliés entre eux par des ressorts de constante de rappel k, le tout relié aux extrémités à des parois fixes, tel qu'illustré ci-dessous.



a) Écrivez l'équation du mouvement longitudinal $x_p(t)$ d'un plomb p quelconque.

b) À partir du résultat trouvé en a), écrivez explicitement les équations du mouvement pour les cas $N = 1$, $N = 2$, et $N = 3$, et résolvez ces équations dans chacun des cas pour trouver les fréquences et les amplitudes relatives des modes normaux.

c) De façon générale, le mouvement d'une corde plombée sera décrit comme une **superposition** des modes normaux. Considérons un tel mouvement pour les cas $N = 5$ et $N = 6$. Qu'arrive-t-il dans chacun des cas au mouvement de la corde si nous immobilisons le plomb $p = 2$ au moment où celui-ci passe au point d'équilibre ?

FORMULES UTILES

$$S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad S^{-1} = \frac{1}{|S|} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$A(\omega) = \frac{F_0/m}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2]^{1/2}}$$

$$\tan\delta(\omega) = \frac{\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

SIGNATURES : LE PROFESSEUR ______________________

Pierre Bergeron

LE DIRECTEUR ______________________

Laurent J. Lewis