

Assimilation de données (4D-VAR) pour le transport de l'eau dans un milieu poreux convectif

Rapport CERCA R2003-16

Eric Bélanger

Centre de recherche en calcul appliqué (CERCA)

11 avril 2003

Résumé

Plusieurs sujets comprenant des enjeux environnementaux ou industriels impliquent la circulation de fluides dans des milieux poreux convectifs. Par exemple, il y a l'écoulement des eaux dans les sols contaminés qui répand les contaminants. Dans ce rapport, nous appliquons l'assimilation de données variationnelle quadridimensionnelle (4D-VAR) à la prévision du transport de l'eau dans un milieu solide poreux et convectif. Nous introduisons une présentation originale de la formulation variationnelle. La méthode 4D-VAR converge exponentiellement. Le transport de l'eau et la convection thermique sont grandement affectés par la présence de perturbations dans les conditions initiales ce qui fausse les prévisions. En utilisant la méthode 4D-VAR, nous parvenons à améliorer les prévisions en corrigeant efficacement les conditions initiales. Cette étude est faite pour le groupe de géophysique du Minnesota Supercomputing Institute.

Abstract

Several subjects of environmental or industrial importance involve the circulation of fluids in porous and convective media. For example, there is the water flow in contaminated soils which transports the contaminants. In this report, we apply four-dimensional variational data assimilation (4D-VAR) to the forecast of water transport in solid, porous and convective media. We will introduce an original presentation of the variational formulation. The 4D-VAR method converge exponentially. The water transport and the thermal convection are greatly affected by the presence of perturbations in the initial conditions. This introduce errors in the forecast. With the 4D-VAR method, we can improve the forecast by making the appropriate corrections to the initial conditions. This study is made for the geophysical group at the Minnesota Supercomputing Institute.

1 La méthode 4D-VAR

La méthode d'assimilation de données 4D-VAR peut être décrite de la façon suivante. D'abord une fonction coût est conçue afin de mesurer l'erreur entre la prévision et les observations (Talagrand & Courtier, 1987). Ensuite, les équations adjointes qui seront utilisées pour évaluer le gradient de cette fonction coût sont obtenues en appliquant une procédure variationnelle au lagrangien du problème (Courtier & Talagrand, 1990). La fonction coût et son gradient sont transmis à un algorithme de minimisation, comme la plus profonde descente (Burden & Faires, 1993), pour trouver les conditions initiales optimales ; c'est-à-dire celles qui donneront une prévision optimale. L'application de la méthode 4D-VAR a été concluante dans plusieurs domaines des sciences environnementales comme l'hydrologie (Bélanger & Vincent, 2002; Bélanger et al., 2003) et la dynamique d'une plume thermique localisée (Bélanger, 2003).

1.1 La fonction coût

Généralement, la fonction coût s'écrit :

$$J = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} f(\vec{\Psi}, \vec{x}, t) d\vec{x} dt \quad (1)$$

où $f(\vec{\Psi}, \vec{x}, t)$ est une fonction scalaire définie sur un domaine Ω et un intervalle de temps $[t_1, t_2]$ (Sanders & Katopodes, 2000). $f(\vec{\Psi}, \vec{x}, t)$ est une fonction de $\vec{\Psi}$ qui représente les variables d'état (variables physiques comme la vitesse ou la température). Dans cette étude, nous voulons minimiser l'erreur dans la concentration d'eau dans le manteau, donc la fonction coût utilisée est :

$$J = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_{t_1}^{t_2} (H - H_{\text{obs}})(H - H_{\text{obs}}) dt d\vec{x} \quad (2)$$

où H est la concentration d'eau prédite et H_{obs} est la concentration d'eau observée.

1.2 Les équations adjointes

Le problème 4D-VAR peut être reformulé comme suit : nous voulons trouver la trajectoire espace-temps des variables d'état $\vec{\Psi}$ qui minimisera la fonction coût (2) tout en obéissant aux équations physiques $\mathcal{E}(\vec{\Psi}, \vec{x}, t) = 0$ qui agissent à titre de contraintes. Ce problème est un problème de minimisation avec contraintes (Talagrand & Courtier, 1987).

Habituellement, afin de résoudre un problème avec contraintes, on utilise le lagrangien. La formulation par multiplicateurs indéterminés de Lagrange nécessite la construction du lagrangien du système que l'on veut étudier :

$$\mathcal{L}(\vec{\Psi}, \vec{\lambda}) = J(\vec{\Psi}) + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \vec{\lambda}(\vec{x}, t) \cdot \mathcal{E}(\vec{\Psi}, \vec{x}, t) d\vec{x} dt \quad (3)$$

où $J(\vec{\Psi})$ est la fonction coût et $\vec{\lambda}(\vec{x}, t)$ sont les multiplicateurs indéterminés de Lagrange aussi appelés variables adjointes (Sanders & Katopodes, 1999). Il a été démontré que trouver les points stationnaires de la fonction coût sous la contrainte $\mathcal{E}(\vec{\Psi}, \vec{x}, t) = 0$ est équivalent à trouver les points stationnaires du lagrangien par rapport aux variables $\vec{\Psi}$ et $\vec{\lambda}$ (Le Dimet & Talagrand, 1986).

Puisque nous devons minimiser le lagrangien, nous devons trouver ses points stationnaires qui ne sont pas des minima ou maxima absolus mais plutôt des points de selle (Le Dimet & Talagrand, 1986). Pour accomplir cette tâche, nous appliquons l'opérateur variationnel δ au lagrangien. Ici, les directions de déplacement sont les variables physique du système ainsi que les variables adjointes. En prenant la variation du lagrangien, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} &= \vec{\nabla}_{\vec{\Psi}} \mathcal{L} \cdot \delta \vec{\Psi} + \vec{\nabla}_{\vec{\lambda}} \mathcal{L} \cdot \delta \vec{\lambda} \\ &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{\Psi}} \delta \vec{\Psi} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{\lambda}} \delta \vec{\lambda} \end{aligned} \quad (4)$$

Il faut noter que du même coup, nous avons linéarisé notre problème (Ehrendorfer, 1992). Pour un déplacement $(\delta \vec{\Psi}, \delta \vec{\lambda})$ arbitraire, nous sommes à un minimum seulement si $\delta \mathcal{L} = 0$ (Daley, 1991). Cela indique que la dérivée du lagrangien par rapport à chaque direction doit être nulle :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{\lambda}} = \mathcal{E}(\vec{\Psi}, \vec{x}, t) = 0 \quad (5)$$

et

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{\Psi}} = \text{Adj}(\vec{\lambda}) + \frac{\partial J}{\partial \vec{\Psi}} = 0 \quad (6)$$

où $\text{Adj}(\vec{\lambda})$ représente les équations adjointes après intégration par parties (Schröter et al., 1993; Wenzel, 2001). Notons que (5) est le système d'équations que l'on avait au départ. Enfin, (5) et (6) sont les équations d'Euler-Lagrange ainsi qu'il a été noté par Le Dimet et Talagrand (1986).

Malheureusement, il n'existe pas de moyen efficace pour résoudre directement les équations d'Euler-Lagrange. Cette situation nous pousse à reformuler notre problème sous forme de problème sans contraintes (Talagrand & Courtier, 1987). Puisque les équations physiques du modèle sont déterministes, il est évident que l'état du système aux temps des observations dépend seulement des conditions initiales $\vec{\Psi}_0$ du système. Cela met en évidence le fait que la fonction coût est une fonction implicite des conditions initiales car c'est en variant les conditions initiales que nous allons trouver la solution des équations physiques qui va minimiser la fonction coût (Ehrendorfer, 1992). Selon la théorie du contrôle optimal (Lions, 1968), les variables de contrôle du problème sont les conditions initiales. On peut aussi utiliser les conditions aux frontières comme variables de contrôle (Wenzel, 2001). Dans notre problème, nous avons enlevé les contraintes puisqu'aucune restriction n'est appliquée sur les conditions initiales.

Finalement, le gradient de la fonction coût (2) par rapport à la concentration d'eau initiale est donné par les variables adjointes évaluées au temps $\tau = t_2$ (Courtier & Talagrand, 1990) :

$$\vec{\nabla} J_{\Psi_0} = \Psi^*(x, z, \tau = t_2) \quad (7)$$

$$\vec{\nabla} J_{u_0} = u^*(x, z, \tau = t_2) \quad (8)$$

$$\vec{\nabla} J_{w_0} = w^*(x, z, \tau = t_2) \quad (9)$$

$$\vec{\nabla} J_{H_0} = H^*(x, z, \tau = t_2) \quad (10)$$

$$\vec{\nabla} J_{T_0} = T^*(x, z, \tau = t_2) \quad (11)$$

1.3 L'algorithme de l'assimilation de données 4D-VAR

Puisque nous ne possédons pas de données expérimentales, nous avons effectué une simulation directe que nous allons dorénavant considérer comme étant nos observations de laboratoire. Lors de notre assimilation de données, nous avons perturbé les conditions initiales avec une fonction sinusoïdale (fig. 1). Une simulation directe avec ces conditions initiales perturbées nous permet d'obtenir une première prévision. Suite à la lecture des observations (obtenues précédemment), nous calculons l'erreur initiale entre la prévision et les observations. Ensuite, nous utilisons un algorithme de minimisation comme la plus profonde descente pour minimiser la fonction coût (2) à l'aide de son gradient (1.2). Lorsque le minimum sera trouvé, nous aurons de nouvelles conditions initiales. Ces conditions initiales sont optimales parce qu'une seconde simulation directe utilisant celles-ci sera une prévision optimale. L'erreur finale entre cette prévision et les observations sera minimale.

2 Les équations directes pour le transport de l'eau dans le manteau terrestre

La convection du manteau est décrite avec l'équation de Navier-Stokes sous forme incompressible avec un nombre de Prandtl infini :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \quad (12)$$

$$-\vec{\nabla} P - \rho \alpha T \vec{g} + \eta \nabla^2 \vec{u} = 0 \quad (13)$$

où \vec{u} est la vitesse, P est la pression, ρ est la densité, α est le coefficient d'expansion thermique, \vec{g} est l'accélération gravitationnelle, T est la température et η est la viscosité. Si on utilise :

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial z} \quad (14)$$

$$w = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (15)$$

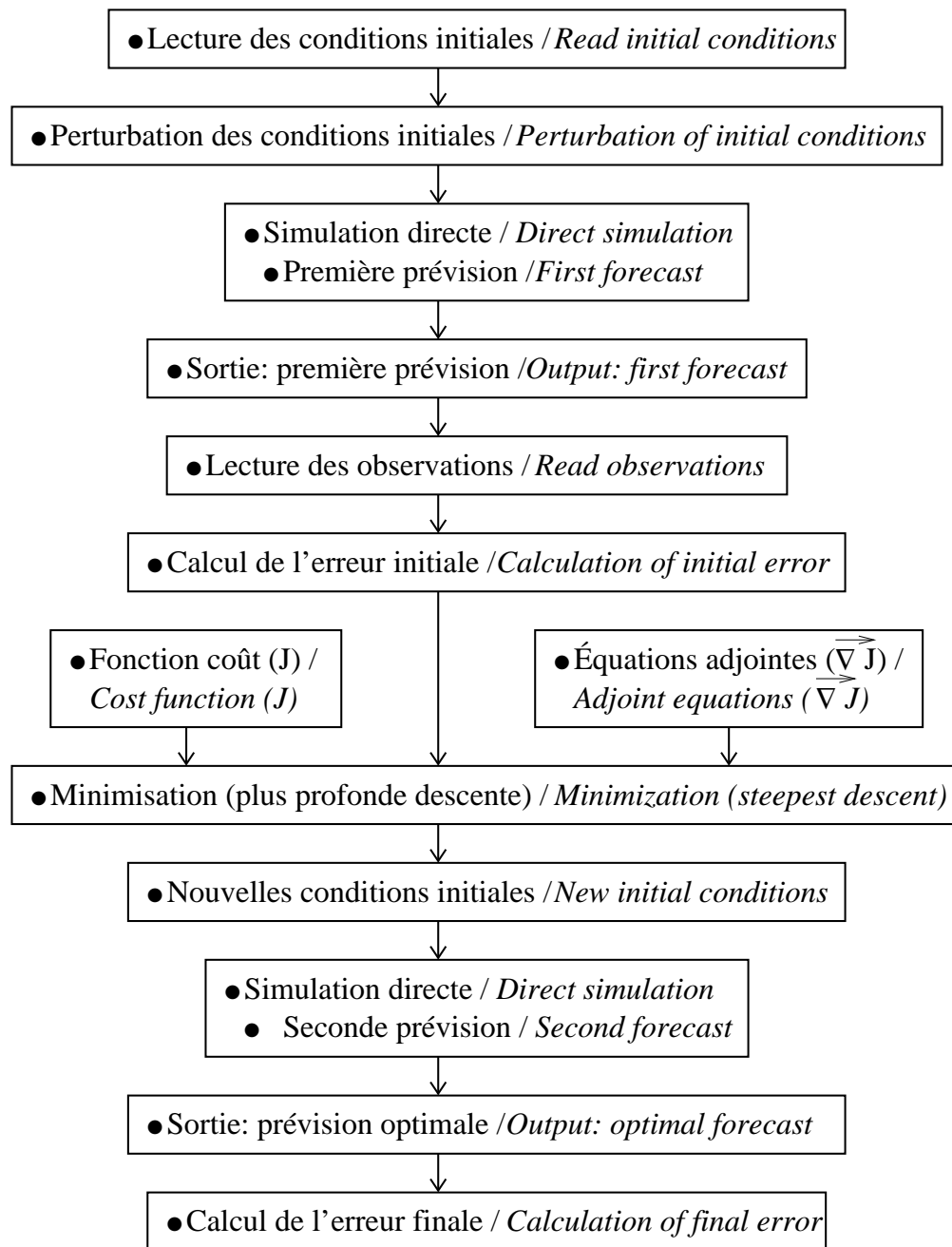


FIG. 1 – Algorithme de la méthode 4D-VAR

nous pouvons réécrire (13) en l'équation de la fonction de courant, Ψ :

$$\frac{\partial^4 \Psi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Psi}{\partial x^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 \Psi}{\partial z^4} = -\frac{\rho \alpha g}{\eta} \frac{\partial T}{\partial x} \quad (16)$$

La température est donnée par :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + w \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial \kappa}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial \kappa}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial z} + \kappa \nabla^2 T + \Phi \quad (17)$$

où κ est la diffusivité thermique et Φ est la source de chaleur interne. La concentration d'eau, H , est modélisée par :

$$\frac{\partial H}{\partial t} + u \frac{\partial H}{\partial x} + w \frac{\partial H}{\partial z} = \kappa_H \frac{\partial}{\partial z} \left(H \frac{\partial \mu}{\partial z RT} \right) + \kappa_H \nabla^2 H + S \quad (18)$$

où κ_H est la diffusivité hydraulique, μ est le potentiel chimique, R est la constante des gaz et S est une source ou un puits d'eau (Richard et al., 2002).

3 Les équations adjointes pour le transport de l'eau dans le manteau terrestre

En suivant la méthode présentée à la section (1), nous obtenons les équations adjointes :

$$\frac{\partial H^*}{\partial \tau} = u \frac{\partial H^*}{\partial x} + w \frac{\partial H^*}{\partial z} + \kappa_H \nabla^2 H^* - \kappa_H \left(\frac{\partial \mu}{\partial z RT} \right) \frac{\partial H^*}{\partial z} - \frac{\partial J}{\partial H} \quad (19)$$

$$\frac{\partial T^*}{\partial \tau} = u \frac{\partial T^*}{\partial x} + w \frac{\partial T^*}{\partial z} + \kappa \nabla^2 T^* - \frac{\partial \kappa}{\partial x} \frac{\partial T^*}{\partial x} - \frac{\partial \kappa}{\partial z} \frac{\partial T^*}{\partial z} + \frac{\rho \alpha g}{\eta} \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} - \frac{\partial J}{\partial T} \quad (20)$$

$$u^* = H \frac{\partial H^*}{\partial x} + T \frac{\partial T^*}{\partial x} - \frac{\partial J}{\partial u} \quad (21)$$

$$w^* = H \frac{\partial H^*}{\partial z} + T \frac{\partial T^*}{\partial z} - \frac{\partial J}{\partial w} \quad (22)$$

$$\frac{\partial^4 \Psi^*}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Psi^*}{\partial x^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 \Psi^*}{\partial z^4} = -\frac{\partial u^*}{\partial z} + \frac{\partial w^*}{\partial x} - \frac{\partial J}{\partial \Psi} \quad (23)$$

où $\tau = t_2 - t$ est un temps inverse. Les conditions initiales sont :

$$\begin{aligned} \delta H(x, z, t|_{t_1}) &= 0 & H^*(x, z, t|_{t_2}) &= 0 \\ \delta T(x, z, t|_{t_1}) &= 0 & T^*(x, z, t|_{t_2}) &= 0 \end{aligned} \quad (24)$$

et leurs conditions aux frontières sont :

$$\begin{aligned}
 H^*(0, z, t) &= 0 & H^*(L_x, z, t) &= 0 \\
 \Psi^*(0, z, t) &= 0 & \Psi^*(L_x, z, t) &= 0 \\
 T^*(0, z, t) &= 0 & T^*(L_x, z, t) &= 0 \\
 w^*(0, z, t) &= 0 & w^*(L_x, z, t) &= 0
 \end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned}
 H^*(x, 0, t) &= 0 & H^*(x, L_z, t) &= 0 \\
 \Psi^*(x, 0, t) &= 0 & \Psi^*(x, L_z, t) &= 0 \\
 T^*(x, 0, t) &= 0 & T^*(x, L_z, t) &= 0 \\
 u^*(x, 0, t) &= 0 & u^*(x, L_z, t) &= 0
 \end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{\partial H^*}{\partial x} \right|_{x=0} &= 0 & \left. \frac{\partial H^*}{\partial z} \right|_{z=0} &= 0 \\
 \left. \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \right|_{x=0} &= 0 & \left. \frac{\partial \Psi^*}{\partial z} \right|_{z=0} &= 0 \\
 \left. \frac{\partial T^*}{\partial x} \right|_{x=0} &= 0 & \left. \frac{\partial T^*}{\partial z} \right|_{z=0} &= 0 \\
 \left. \frac{\partial H^*}{\partial x} \right|_{x=L_x} &= 0 & \left. \frac{\partial H^*}{\partial z} \right|_{z=L_z} &= 0 \\
 \left. \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \right|_{x=L_x} &= 0 & \left. \frac{\partial \Psi^*}{\partial z} \right|_{z=L_z} &= 0 \\
 \left. \frac{\partial T^*}{\partial x} \right|_{x=L_x} &= 0 & \left. \frac{\partial T^*}{\partial z} \right|_{z=L_z} &= 0 \\
 \left. \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial x^2} \right|_{x=0} &= 0 & \left. \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial z^2} \right|_{z=0} &= 0 \\
 \left. \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial x^2} \right|_{z=0} &= 0 & \left. \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial x^2} \right|_{z=L_z} &= 0 \\
 \left. \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial x^2} \right|_{x=L_x} &= 0 & \left. \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial z^2} \right|_{z=L_z} &= 0 \\
 \left. \frac{\partial^3 \Psi^*}{\partial x^3} \right|_{x=0} &= 0 & \left. \frac{\partial^3 \Psi^*}{\partial z^3} \right|_{z=0} &= 0 \\
 \left. \frac{\partial^3 \Psi^*}{\partial x^2 \partial z} \right|_{z=0} &= 0 & \left. \frac{\partial^3 \Psi^*}{\partial x^2 \partial z} \right|_{z=L_z} &= 0 \\
 \left. \frac{\partial^3 \Psi^*}{\partial x^3} \right|_{x=L_x} &= 0 & \left. \frac{\partial^3 \Psi^*}{\partial z^3} \right|_{z=L_z} &= 0
 \end{aligned} \tag{27}$$

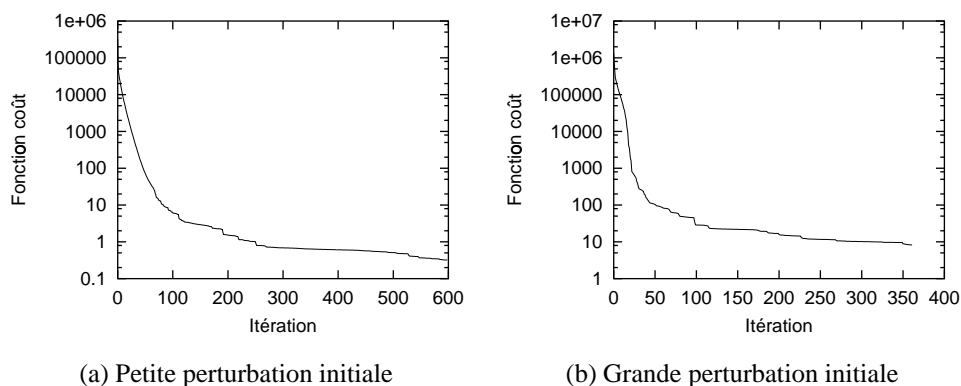


FIG. 2 – Minimisation de la fonction coût avec la méthode de la plus profonde descente. La fonction coût décroît de façon exponentielle, rapidement au début puis lentement vers la fin. Plus la perturbation initiale est élevée (fig. 2(b)), plus la fonction coût garde une valeur élevée.

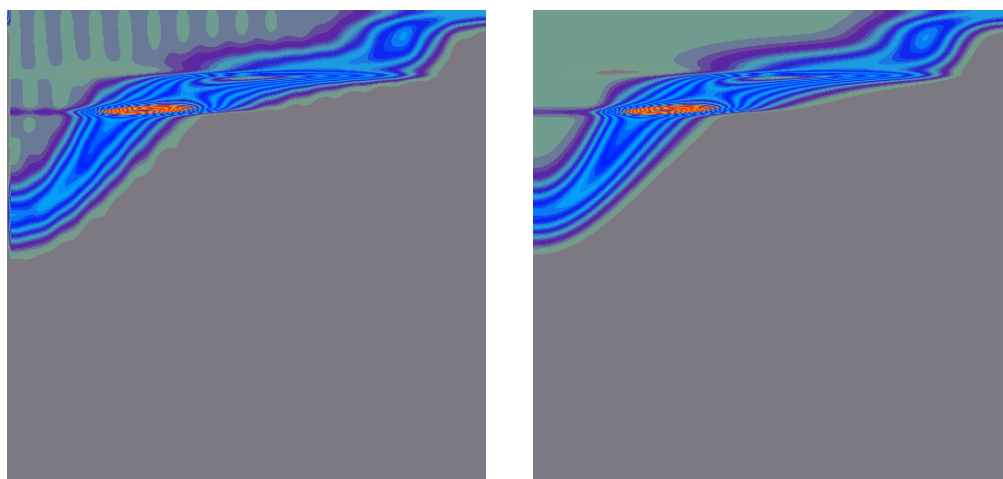
4 Résultats et discussion

Nous allons présenter les résultats obtenus pour deux cas, soit une petite perturbation initiale et une grande perturbation initiale. La petite perturbation est de l'ordre de 1 % sur la température et de 19 % sur la concentration d'eau. La grande perturbation est de l'ordre de 9 % sur la température et de 39 % sur la concentration d'eau. Ces moyennes, qui peuvent sembler énormes, ont été faites sur la moyenne. Le temps de prévision est de 5 millions d'années.

La figure (2) représente la valeur de la fonction coût par rapport à l'itération en cours lors de la minimisation avec la méthode de la plus profonde descente. Beaucoup d'itérations sont nécessaires afin d'obtenir une convergence. Néanmoins, la fonction coût diminue rapidement lors des premières itérations. Nous avons utilisé une échelle logarithmique pour l'ordonnée puisque les courbes de convergences ressemblent à des exponentielles. La figure (2) nous permet également de constater que plus la perturbation initiale est élevée, plus il est difficile de minimiser la fonction coût. Avec une petite perturbation (fig. 2(a)), la fonction coût atteint une valeur inférieure à 1 tandis qu'avec la grande perturbation (fig. 2(b)) la convergence se stabilise près de 10. Dans les deux cas, la fonction coût est diminuée de plusieurs ordres de grandeurs.

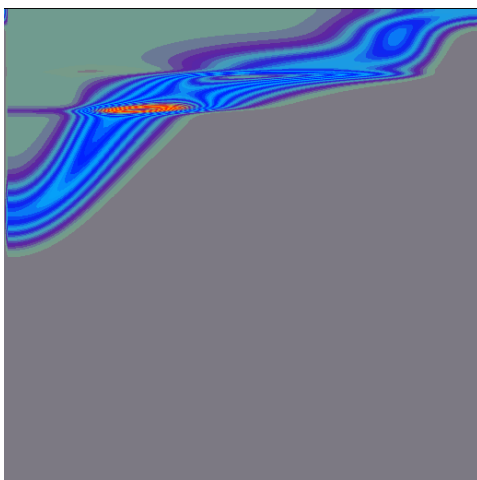
Nous allons porter notre attention au moment où l'eau a déjà commencé à passer du manteau supérieur au manteau inférieur via la zone de transition. Il y a une forte concentration d'eau à la frontière de la zone de transition et du manteau inférieur (fig. 3 et 4). Lorsque les conditions initiales sont un peu perturbées, la prévision 4D-VAR réussit à corriger le bruit dans la prévision (fig. 3). Même avec une perturbation initiale de plus grande amplitude, la méthode 4D-VAR retrouve les observations (fig. 4).

En étudiant la distribution de température pour les deux cas précédents, nous



(a) Prévission

(b) Observation



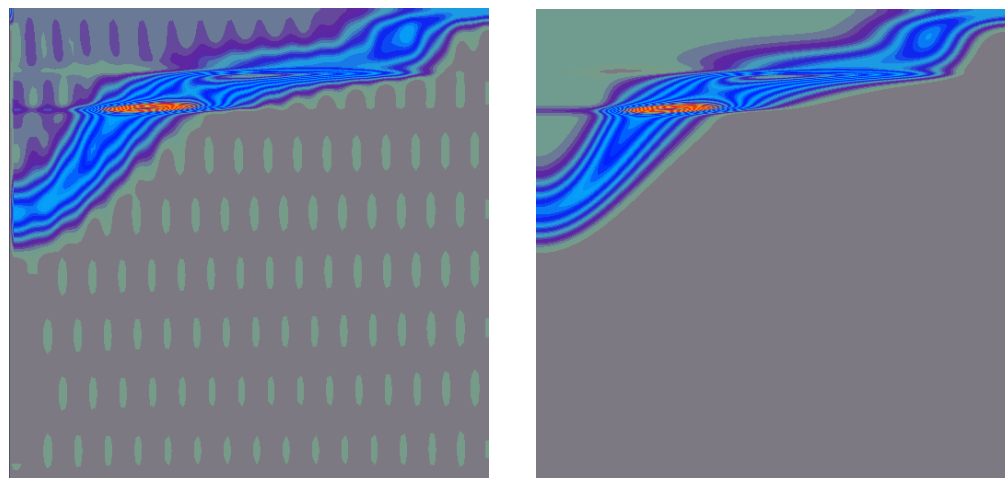
(c) Prévission 4D-VAR



Concentration min.

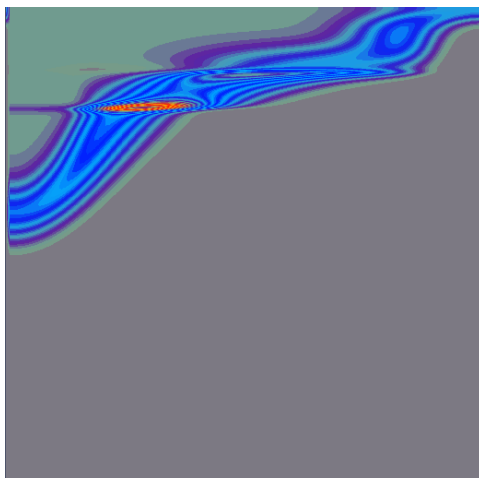
Concentration max.

FIG. 3 – Comparaison des prévisions de la concentration d'eau entre une simple simulation et avec la méthode 4D-VAR lors d'une petite perturbation initiale. Dans la prévision 4D-VAR (fig. 3(c)), on note la disparition des ondulations de fond dans le coin supérieur gauche (fig. 3(a)). La méthode 4D-VAR a retrouvé les observations (fig. 3(b)).



(a) Prévision

(b) Observation



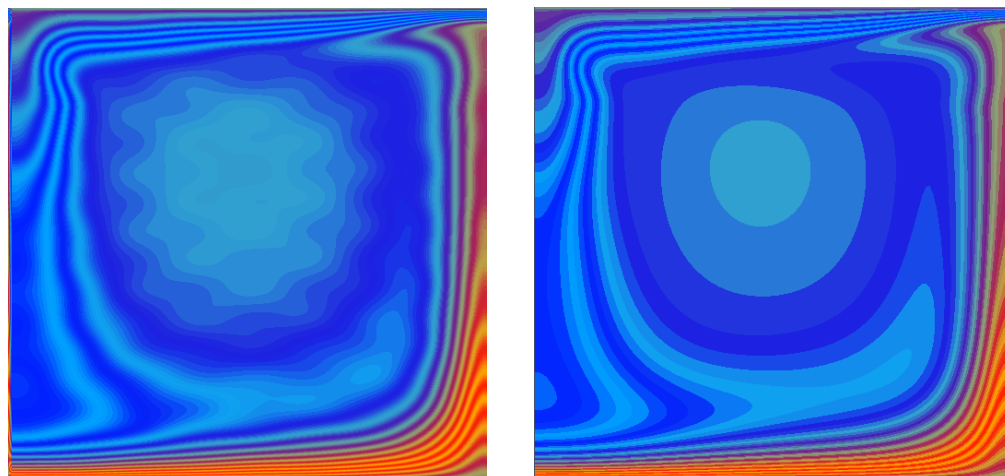
(c) Prévision 4D-VAR



Concentration min.

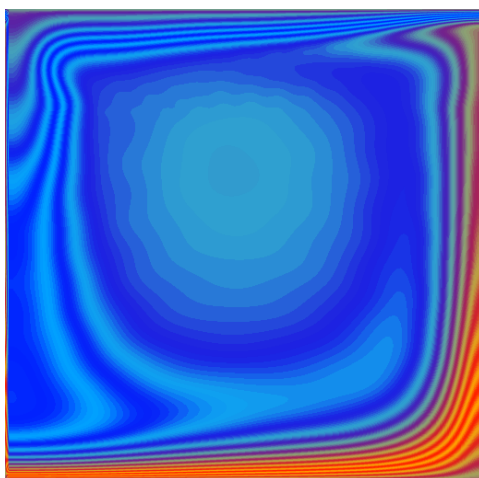
Concentration max.

FIG. 4 – Comparaison des prévisions de la concentration d'eau entre une simple simulation et avec la méthode 4D-VAR lors d'une grande perturbation initiale. Dans la prévision 4D-VAR (fig. 4(c)), on note la disparition du bruit de fond et la correction de la structure de l'écoulement principal (fig. 4(a)). La méthode 4D-VAR a retrouvé les observations (fig. 4(b)).



(a) Préviation

(b) Observation



(c) Préviation 4D-VAR

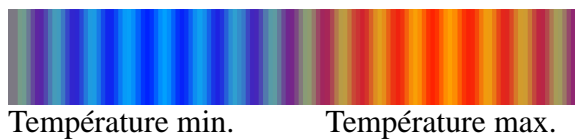
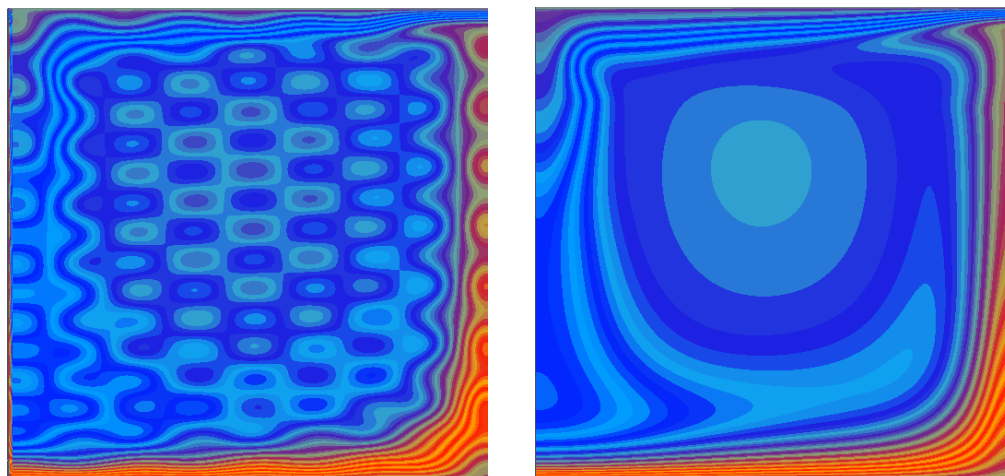
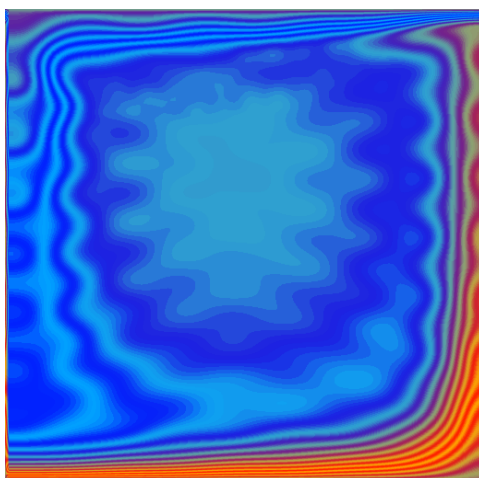


FIG. 5 – Comparaison des prévisions de la température entre une simple simulation et avec la méthode 4D-VAR lors d'une petite perturbation initiale. Dans la prévision 4D-VAR (fig. 5(c)), on note la disparition des ondulations dans la structure au milieu mais il y a encore un manque de contraste (fig. 5(a)). Avec la méthode 4D-VAR, les prévisions ont retrouvé la structure du vortex des observations (fig. 5(b)).



(a) Prévision

(b) Observation



(c) Prévision 4D-VAR

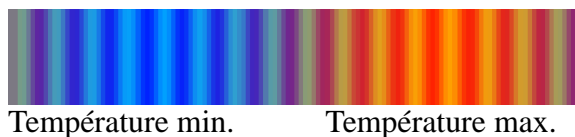


FIG. 6 – Comparaison des prévisions de la température entre une simple simulation et avec la méthode 4D-VAR lors d'une grande perturbation initiale. La prévision traditionnelle a été grandement affectée par la perturbation : elle est très bruitée (fig. 6(a)). Dans la prévision 4D-VAR (fig. 6(c)), on note la quasi disparition du bruit et nous avons retrouv e la structure principale du vortex. La méthode 4D-VAR a retrouv e grossièrement les observations (fig. 6(b)).

remarquons, a priori, que la prévision de la température a été améliorée avec la méthode 4D-VAR (fig. 5 et 6). Cette amélioration a eu lieu malgré le fait que seule l'erreur dans la concentration d'eau est mesurée par la fonction coût (2). Cela est expliqué par le couplage des équations physiques (14 – 18) qui force la correction de la température initiale pour obtenir de meilleurs résultats quant à la prédiction de la concentration d'eau. La figure (5) démontre que la méthode 4D-VAR a corrigé les ondulations causées par une petite perturbation initiale pour retrouver le vortex. Mais les prévisions sont restées floues. Les effets d'une perturbation initiale plus importante sont évidents à la figure (6) où il y a beaucoup de bruit dans la prévision. La méthode 4D-VAR réussit à reconstruire les caractéristiques principales du vortex.

5 Conclusion

Les résultats obtenus suite aux deux cas considérés dans ce rapport indiquent que la méthode 4D-VAR est capable de corriger des conditions initiales erronées afin d'obtenir de meilleures prévisions. Comme la minimisation requiert beaucoup d'itérations, il faudra peut-être utiliser moins de points de grille pour effectuer, dans des délais raisonnables, des prévisions sur de plus longs intervalles de temps. Il est possible d'arrêter le processus de minimisation avant sa convergence. Cela améliorera le temps de calcul mais les prévisions ne seront pas optimales. Comme travail futur, l'utilisation d'un gradient conjugué ou un quasi-Newton en remplacement de la plus profonde descente réduira le temps de convergence. Nous pourrions également changer la fonction coût en utilisant l'erreur sur la température, par exemple.

6 Remerciements

J'aimerais remercier le Professeur David Yuen, de l'Université du Minnesota, pour avoir proposé et entièrement financé ce travail et pour ses encouragements. Le travail numérique a été fait sur l'IBM Regatta du MSI. Je remercie Guillaume Richard, de l'Observatoire Midi-Pyrénées (Toulouse, France), pour avoir contribué au code de simulation du transport de l'eau et pour les discussions enrichissantes. Enfin, je remercie le Professeur Alain Vincent, de l'Université de Montréal, pour ses conseils et pour son soucis constant d'applications industrielles.

Références

- Bélangier, E. (2003). *Assimilation de données (4D-VAR) pour un panache thermique*. Rapport Technique CERCA R2003-13, CERCA. http://www.cerca.umontreal.ca/~belanger/rapport_CERCA_plume.pdf.
- Bélangier, E. & Vincent, A. (2002). Data assimilation (4D-VAR) to forecast flood in shallow waters with sediment erosion. *Journal of Hydrology*. Soumis sept. 2002, <http://www.cerca.umontreal.ca/~belanger/article.pdf>.
- Bélangier, E., Vincent, A., & Fortin, A. (2003). Data assimilation (4D-VAR) for shallow-water flow : The case of the Chicoutimi River. *Visual Geosciences*, 8. <http://link.springer.de/link/service/journals/10069/free/discussion/belanger/index.html>.
- Burden, R. L. & Faires, J. D. (1993). *Numerical Analysis*. Boston : PWS Publishing Company.
- Courtier, P. & Talagrand, O. (1990). Variational assimilation of meteorological observations with the direct and adjoint shallow-water equations. *Tellus*, 42A, 531–549.
- Daley, R. (1991). *Atmospheric Data Analysis*. Cambridge atmospheric and space science series. Cambridge : Cambridge University Press.
- Ehrendorfer, M. (1992). Four-dimensional data assimilation : comparison of variational and sequential algorithms. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 118, 673–713.
- Le Dimet, F.-X. & Talagrand, O. (1986). Variational algorithms for analysis and assimilation of meteorological observations : theoretical aspects. *Tellus*, 38A, 97–110.
- Lions, J. L. (1968). *Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles*. Paris : Dunod.
- Richard, G., Monnereau, M., & Ingrin, J. (2002). Is the transition zone an empty water reservoir ? Inferences from numerical model of mantle dynamics. *Earth and Planetary Science Letters*, 205, 37–51.
- Sanders, B. F. & Katopodes, N. D. (1999). Control of canal flow by adjoint sensitivity method. *Journal of irrigation and drainage engineering*, 125(5), 287–297.
- Sanders, B. F. & Katopodes, N. D. (2000). Adjoint sensitivity analysis for shallow-water wave control. *Journal of Engineering Mechanics*, 126(9), 909–919.
- Schröter, J., Seiler, U., & Wenzel, M. (1993). Variational assimilation of geosat data into a eddy-resolving model of the gulf stream extension area. *Journal of Physical Oceanography*, 23(5), 925–953.
- Talagrand, O. & Courtier, P. (1987). Variational assimilation of meteorological observations with the adjoint vorticity equation. I : Theory. *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, 113, 1311–1328.

Wenzel, M. (2001). *Adjoint Method (4D-VAR)*. The Alfred Wegener Institute Foundation for Polar and Marine Research. <http://e-net.awi-bremerhaven.de/Modelling/INVERSE/adjoint.html>.