

# Assimilation de données (4D-VAR) pour l'équation de Burgers, la convection thermique et la prospection électrique

## Rapport CERCA R2002-77

Eric Bélanger

Alain Vincent

Centre de recherche en calcul appliqué (CERCA)

Département de Physique, Université de Montréal

14 avril 2003

### **Résumé**

Dans ce rapport technique, nous allons appliquer l'assimilation de données 4D-VAR à trois problèmes concrets : l'équation de Burgers, la convection thermique et la prospection électrique. Cette étude intéresse le groupe de Géophysique industrielle du CERCA et les recherches sur la convection turbulente menées au Minnesota Supercomputing Institute.

# 1 L'équation de Burgers

## 1.1 L'équation de Burgers et ses applications

Dans cette étude nous allons appliquer la méthode 4D-VAR à l'équation de Burgers pour une dimension :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1)$$

où  $u$  est une quantité (ayant les dimensions  $LT^{-1}$ ) analogue à une vitesse et  $\nu$  est une diffusivité ou une viscosité cinématique avec les dimensions de  $L^2T^{-1}$ . Quant aux trois termes (de dimension  $LT^{-2}$ ), nous notons que le premier a la forme d'une accélération, le second une advection et le troisième une diffusivité ou une viscosité.

Elle a été dérivée en 1948 (Burgers, 1948) pour modéliser la turbulence hydrodynamique et les chocs (Burgers, 1974).

Dans les sections suivantes, nous allons démontrer que malgré sa simplicité, l'équation de Burgers a plusieurs applications.

### 1.1.1 Modèle pour la croissance d'une interface

L'équation de Langevin pour la hauteur  $h(x, t)$  d'une interface qui croît est :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\lambda}{2} \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 = \nu \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}. \quad (2)$$

En utilisant la substitution  $u = \frac{\partial h}{\partial x}$ , on obtient :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \lambda u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (3)$$

ce qui donne l'équation de Burgers lorsque  $\lambda = 1$  (Kardar et al., 1986).

### 1.1.2 Mathématiques financières

L'équation de Black-Scholes est :

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 s^2 \frac{\partial^2 F}{\partial s^2} + rs \frac{\partial F}{\partial s} - rF = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad s \geq 0 \quad (4)$$

où  $F(t, s)$  est l'option d'acheter un titre à un prix prédéterminé,  $t$  est le temps,  $s$  est le prix courant du titre,  $\sigma$  est la volatilité du titre et  $r$  est le taux d'intérêt (Carlsson, 1997).

Si on inverse le temps ( $t \rightarrow T - t$ ), on obtient :

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial s} \left[ \underbrace{(\sigma^2 - r)sF}_{\text{advection}} - \underbrace{\frac{\sigma^2 s^2}{2} \frac{\partial F}{\partial s}}_{\text{diffusif}} \right]}_{\text{Flux total}} = \underbrace{(\sigma^2 - 2r)F}_{\text{Terme source}}. \quad (5)$$

### 1.1.3 Écoulement d'un embouteillage

L'écoulement est défini comme étant le nombre de véhicules qui passent un certain point pendant un temps donné. L'embouteillage peut être formée par des feux rouges qui créent un amoncellement de véhicules.

Si nous considérons une route à une voie ayant un écoulement  $q(x, t)$ , nous avons :

$$\frac{\partial q}{\partial t} + v(q, x) \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad (6)$$

où  $v(q, x)$  est la vitesse du bouchon (Newell, 1993; Haberman, 1977).

## 1.2 Discrétisation utilisée

On réécrit l'équation de Burgers :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial x} = v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (7)$$

Nous allons utiliser un schéma à différences finies amont en espace et Euler en temps <sup>1</sup> :

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= u_j^n - \frac{\delta t}{2\delta x} [(u_j^n)^2 - (u_{j-1}^n)^2] \\ &\quad + \frac{v\delta t}{\delta x^2} (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n). \end{aligned} \quad (11)$$

De plus, ce schéma est plus stable que les schémas de *Lax-Wendroff*, *Galerkin* et *Petrov-Galerkin* (Finlayson, 1992).

## 1.3 La fonction coût et son gradient

Soit  $M$  le modèle non-linéaire qui prend un état  $\mathbf{x}_0$  et l'emmène au temps  $t$  ( $\mathbf{x}_t = M(\mathbf{x}_0)$ ),  $A_t$  l'analyse (observations au temps  $t$ ),  $E = M - A_t$  l'erreur,  $L$  le

<sup>1</sup>Si nous exprimons  $u$  dans ses expansions de Taylor, nous avons :

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \delta t \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)_j^n + \frac{\delta t^2}{2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)_j^n + O(\delta t^3) \quad (8)$$

$$u_{j+1}^n = u_j^n + \delta x \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_j^n + \frac{\delta x^2}{2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_j^n + O(\delta x^3) \quad (9)$$

$$u_{j-1}^n = u_j^n - \delta x \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_j^n + \frac{\delta x^2}{2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_j^n + O(\delta x^3) \quad (10)$$

où les indices  $j$  et  $n$  représentent respectivement l'espace et le temps. Nous utilisons (8) pour obtenir par isolation le terme  $\frac{\partial u}{\partial t}$ . Pour le terme  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ , nous l'isolons après avoir additionné (9) et (10). Si on substitue  $u$  par  $u^2$  dans (10) nous pouvons isoler  $\frac{\partial u^2}{\partial x}$ . Et nous obtenons (11).

propagateur linéaire et  $L^*$  son adjoint tel définit dans le produit scalaire  $\langle \mathbf{x}, L\mathbf{y} \rangle = \langle L^*\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$  pour n'importe quels  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ .

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{x}, L\mathbf{y} \rangle &= \langle L^*\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \\
\mathbf{x}^T W^2 L\mathbf{y} &= (L^*\mathbf{x})^T W^2 \mathbf{y} \\
\mathbf{x}^T W^2 L\mathbf{y} &= \mathbf{x}^T (L^*)^T W^2 \mathbf{y} \\
\Rightarrow W^2 L &= (L^*)^T W^2 \\
(L^*)^T &= W^2 L W^{-2} \\
L^* &= W^{-2} L^T W^2
\end{aligned} \tag{12}$$

La méthode 4D-VAR nous donne la perturbation  $\delta\mathbf{x}_0$  dans les conditions initiales qui produit :

$$M(\mathbf{x}_0 + \delta\mathbf{x}_0) = A_t \tag{13}$$

où :

$$\delta\mathbf{x}_t = L\delta\mathbf{x}_0 \cong M(\mathbf{x}_0) - A_t = E. \tag{14}$$

Dans l'approche standard, on construit une fonction coût. Nous allons utiliser la norme d'énergie en imposant que l'énergie totale pour un état  $\mathbf{x}$  soit définie par  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \mathbf{x}^T W^2 \mathbf{x}$  où  $W$  est une matrice de poids statistiques. La fonction coût est alors :

$$\begin{aligned}
J &= \frac{1}{2} \langle M(\mathbf{x}_0) - A_t, M(\mathbf{x}_0) - A_t \rangle \\
&= \frac{1}{2} (M(\mathbf{x}_0) - A_t)^T W^2 (M(\mathbf{x}_0) - A_t) \\
&= \frac{1}{2} (L\delta\mathbf{x}_0)^T W^2 (L\delta\mathbf{x}_0) \\
&= \frac{1}{2} \delta\mathbf{x}_0^T L^T W^2 E \\
&= \frac{1}{2} \delta\mathbf{x}_0^T W^2 L^* E.
\end{aligned} \tag{15}$$

Une perturbation  $\delta\mathbf{x}_0$  crée une variation dans la fonction coût :

$$\begin{aligned}
\delta J &= \langle M(\mathbf{x}_0) - A_t, \delta\mathbf{x}_t \rangle \\
&= \langle M(\mathbf{x}_0) - A_t, L\delta\mathbf{x}_0 \rangle \\
&= \langle L^* [M(\mathbf{x}_0) - A_t], \delta\mathbf{x}_0 \rangle \\
&= \langle L^* E, \delta\mathbf{x}_0 \rangle.
\end{aligned} \tag{16}$$

Puisque par définition  $\delta J = \langle \nabla J(\mathbf{x}_0), \delta\mathbf{x}_0 \rangle$ , le gradient de la fonction coût est :

$$\nabla J(\mathbf{x}_0) = L^* L \delta\mathbf{x}_0 = L^* E. \tag{17}$$

## 1.4 Le problème adjoint

Nous allons trouver le modèle adjoint de l'équation de Burgers (Kalnay et al., 2000) :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} \quad (18)$$

où  $\bar{u} = u + \delta u$ .

Si on assume que  $u = u(x)$ , la perturbation linéaire est :

$$\frac{\partial \delta u}{\partial t} + u \frac{\partial \delta u}{\partial x} + \delta u \frac{du}{dx} = \nu \frac{\partial^2 \delta u}{\partial x^2}. \quad (19)$$

Nous allons considérer que la perturbation  $\delta u$  est sous forme d'onde, la série de Fourier s'écrit :

$$f(\delta u) = \sum_{k=-K}^{k=+K} C_k e^{ik\delta u} \quad (20)$$

$$f(\delta u) = a_0 + \sum a_k \cos(k\delta u) + \sum b_k \sin(k\delta u). \quad (21)$$

Dans notre cas, on a :

$$\delta u = A(t) \sum e^{ik(x-ut)} \quad (22)$$

ou bien :

$$\delta u = A(t) e^{ik(x-ut)} \quad (23)$$

si on fait la somme implicitement. En substituant (23) dans (19) et en rassemblant les termes semblables :

$$\frac{dA}{dt} + \left( \frac{du}{dx} + \nu k^2 \right) A = 0. \quad (24)$$

Alors, si on résout pour  $A(t)$  :

$$A(t) = A_0 e^{-\left(\frac{du}{dx} + \nu k^2\right)t}. \quad (25)$$

Si on substitue (25) dans (23) pour obtenir  $\delta u(t)$  :

$$\delta u(t) = e^{-ikut} e^{-\frac{du}{dx}t} e^{-\nu k^2 t} \delta u(0). \quad (26)$$

Comme  $\delta u(t) = L \delta u(0)$ , le modèle de la tangente linéaire ou propagateur est :

$$L = e^{-\left(\frac{du}{dx} + \nu k^2\right)t - ikut}. \quad (27)$$

Si on prend le complexe conjugué de la transposée, on obtient le modèle adjoint :

$$L^* = e^{-\left(\frac{du}{dx} + \nu k^2\right)t + ikut}. \quad (28)$$

En ce qui nous concerne, nous allons prendre la partie imaginaire puisque nous allons utiliser, comme condition initiale, des sinus ayant des conditions aux limites nulles, alors  $L^*$  devient :

$$L^* = e^{-\left(\frac{du}{dx} + \nu k^2\right)t} \sin(kut). \quad (29)$$

## 1.5 Expérience numérique et les résultats

### 1.5.1 L'initialisation

Premièrement, nous devons initialiser certaines constantes du problème. Nous avons pris une viscosité  $\nu = 0.1 \text{ m}^2/\text{s}$ . Notre condition initiale pour la simulation initiale sera  $\sin(x)$  avec un domaine allant de 0 à  $2\pi$ . Ce domaine a été discrétisé en 256 points de grille. Bien sûr, la perturbation initiale est nulle ( $\delta u_0 = 0$ ) puisque nous estimons en premier lieu que notre modèle produira des résultats correspondants aux observations. Nous introduisons également un paramètre de tolérance  $\epsilon$  qui indique l'erreur désirée entre les observations et notre simulation finale (les résultats).

La fonction coût s'écrit :

$$J = \sum_{i=1}^{N_x} \delta u_i W^2 L_i^* E_i \quad (30)$$

où  $N_x$  est le nombre de points de grille ( $N_x=256$ ),  $L_i^*$  est l'adjoint de  $L_i$ ,  $W = 1$  et  $E_i$  est l'erreur. L'adjoint est comme dans (29) où  $k = 2\pi$  et  $\frac{du}{dx}$  est calculé par différences finies. Pour le gradient, la méthode est semblable sauf que l'on dérive  $J$  par rapport à chaque  $\delta u_i$ . Cela donne :

$$\nabla J_i = W^2 L_i^* E_i. \quad (31)$$

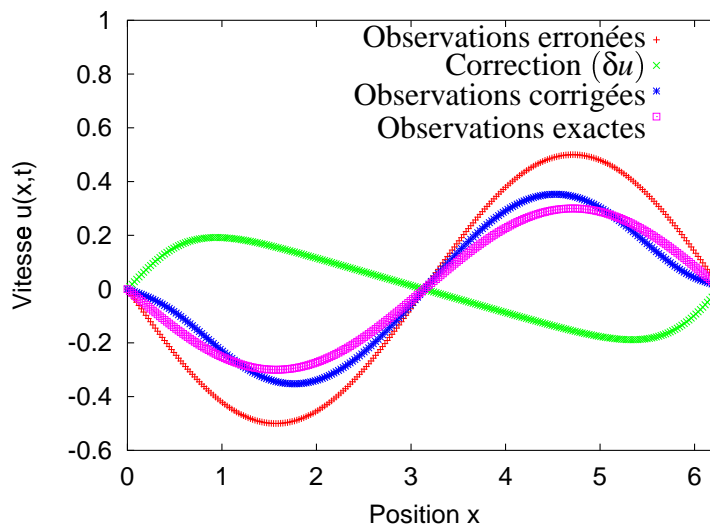
### 1.5.2 Les résultats

Dans la figure (1), nous avons d'abord en rouge la condition initiale où nous débutons la méthode 4D-VAR. Après la minimisation de la fonction coût, nous obtenons une correction optimale dénotée par la courbe verte. Nous obtenons les conditions initiales corrigées (courbe bleue) en additionnant les observations erronées avec la correction. Nous voyons que les observation corrigées correspondent mieux aux observations exactes (courbe mauve) que les observation erronées.

Dans la figure (2), nous comparons plusieurs prévisions avec les observations. Si on effectue une simulation de  $t=0$  s à  $t=1$  s, nous obtenons la courbe rouge qui est très éloignée des observations prises à  $t=1$  s (courbe bleue). En utilisant la méthode 4D-VAR, nous obtenons la courbe verte qui est plus rapprochée des observations. Il est possible de faire, en utilisant la prévision obtenue par la méthode 4D-VAR à  $t=1$  s comme condition initiale, une prévision à  $t=2$  s (courbe mauve qui est superposée au observations à  $t=1$  s). Enfin, la courbe grise représente les observations exactes à  $t=2$  s.

Dans la figure (3), nous analysons les erreurs. Les courbes rouge et verte représentent l'erreur entre la prédiction et les observations à  $t=1$  s. La méthode 4D-VAR nous donne une réduction de l'erreur moyenne de 76%. Quant aux courbes bleue et mauve, elles montrent l'erreur entre les observations erronées et corrigées avec les observations exactes. L'utilisation de la correction réduit l'erreur moyenne de 68%. Malgré ces réductions d'erreur plutôt élevées, nous aurions souhaité une plus petite erreur du côté de la correction apportée à  $t=0$  s.

FIG. 1 – Conditions initiales et correction



### 1.5.3 Coût de calcul

Au tableau (1), nous comparons le temps de calcul d'une simulation sans la méthode 4D-VAR avec une simulation utilisant la méthode 4D-VAR. Voici une définition des différents temps :

- Temps de l'utilisateur : exécution du programme
- Temps du système : exécution des ordres du système d'exploitation (entrées/sorties)
- Temps du processeur (utilisateur + système) : temps total

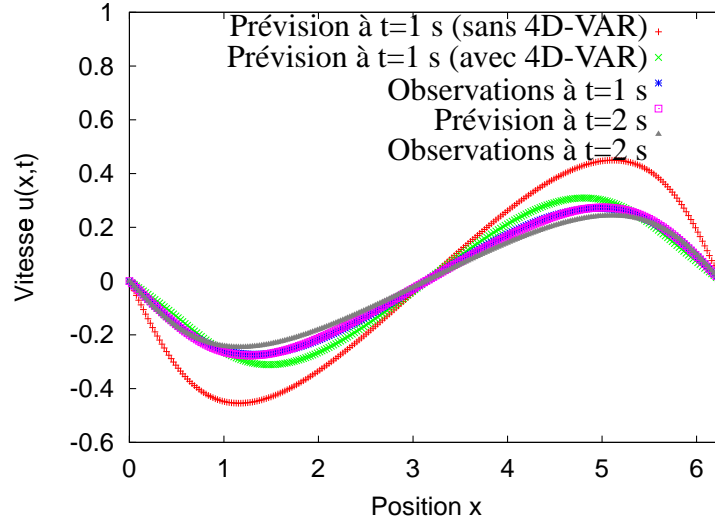
	Sans 4D-VAR	Avec 4D-VAR
Temps de l'utilisateur	0.12 s	1.28 s
Temps du système	0.02 s	0.04 s
Temps du processeur	0.14 s	1.32 s

TAB. 1 – Temps de calcul

## 2 Panache thermique

Dans cette section, nous écrivons les équations pour l'assimilation de données 4D-VAR dans le cas du plume thermique localisé (fig. 4). Pour produire un tel panache, nous avons un point de chauffe situé au centre de la frontière inférieure du contenant. Cela réchauffe le fluide (un liquide ou un gaz) dans les environs et celui-ci monte puisqu'il est plus chaud, donc plus léger, que le fluide près de

FIG. 2 – Prévisions et observations



la surface. Pendant la montée, il y a création de tourbillons (fig. 4) puisque le fluide plus froid veut descendre. Un exemple d'un tel phénomène de convection serait un feu de forêt où l'on voit la fumée s'élever dans le ciel sous l'effet de l'air chaud produit par les flammes qui agissent comme un point de chauffe. Ces instabilités sont appelés convection de Rayleigh-Bénard (Tritton, 1988). Maintenant, nous allons présenter les équations physiques décrivant la convection de Rayleigh-Bénard, ensuite nous allons développer leurs adjointes. L'application de la méthode 4D-VAR serait efficace pour un intervalle de temps où le plume ne s'est pas beaucoup déformé comme c'est le cas pour les figures (4a) et (4b). L'intervalle de temps écoulé entre les figure (4a) et (4c) ou (4d) est trop grand. On ne reconnaît plus le plume original. Si on utilise cet intervalle pour la méthode 4D-VAR, on peut probablement s'attendre à des complications et à un important écart entre la prédiction et les observations.

## 2.1 Les équations physiques

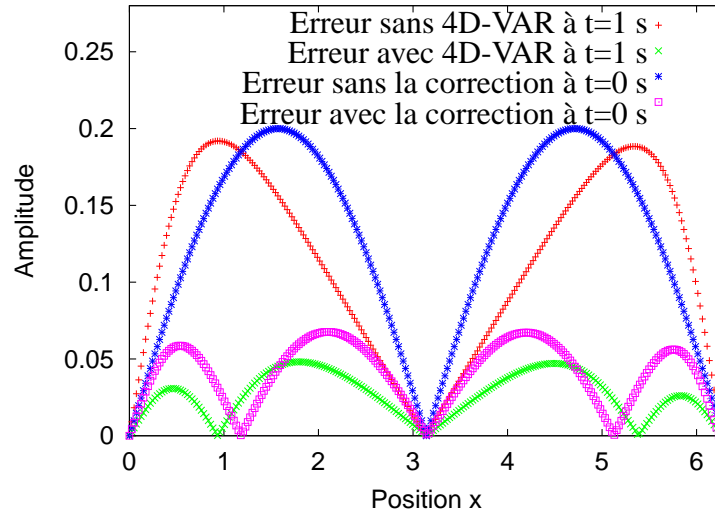
Les équations physiques de ce phénomène découlent des principes fondamentaux de conservation. Nous avons la conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \rho \vec{v} = 0, \quad (32)$$

la conservation de la quantité de mouvement :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P + \nu \nabla^2 \vec{v} + \vec{g} \hat{e}_y, \quad (33)$$

FIG. 3 – Magnitude des erreurs des prévisions et de la correction



et la conservation de l'énergie thermique :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} T = \kappa \nabla^2 T. \quad (34)$$

Nous allons simplifier ces équations en utilisant l'approximation de Boussinesq qui stipule que les propriétés physiques du fluides sont constantes. De plus, la densité est constante partout sauf aux endroits où elle crée une force gravitationnelle. L'équation d'état pour la densité est :

$$\rho = \rho_0(1 - \alpha(T - T_r)). \quad (35)$$

Les équations adimensionnées avec la profondeur  $d$  comme échelle de longueur, le temps de diffusion thermique  $d^2/\kappa$ ,  $\Delta T$  la différence de température entre le bas et le haut s'écrivent :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \quad (36)$$

$$\frac{1}{\text{Pr}} \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{v} \right) = -\vec{\nabla} P + \nabla^2 \vec{v} + \text{Ra} T \hat{e}_y \quad (37)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} T = \nabla^2 T \quad (38)$$

où

$$\text{Pr} = \frac{\text{viscosité cinématique}}{\text{diffusivité thermique}} \quad (39)$$

$$= \frac{\nu}{\kappa} \quad (40)$$

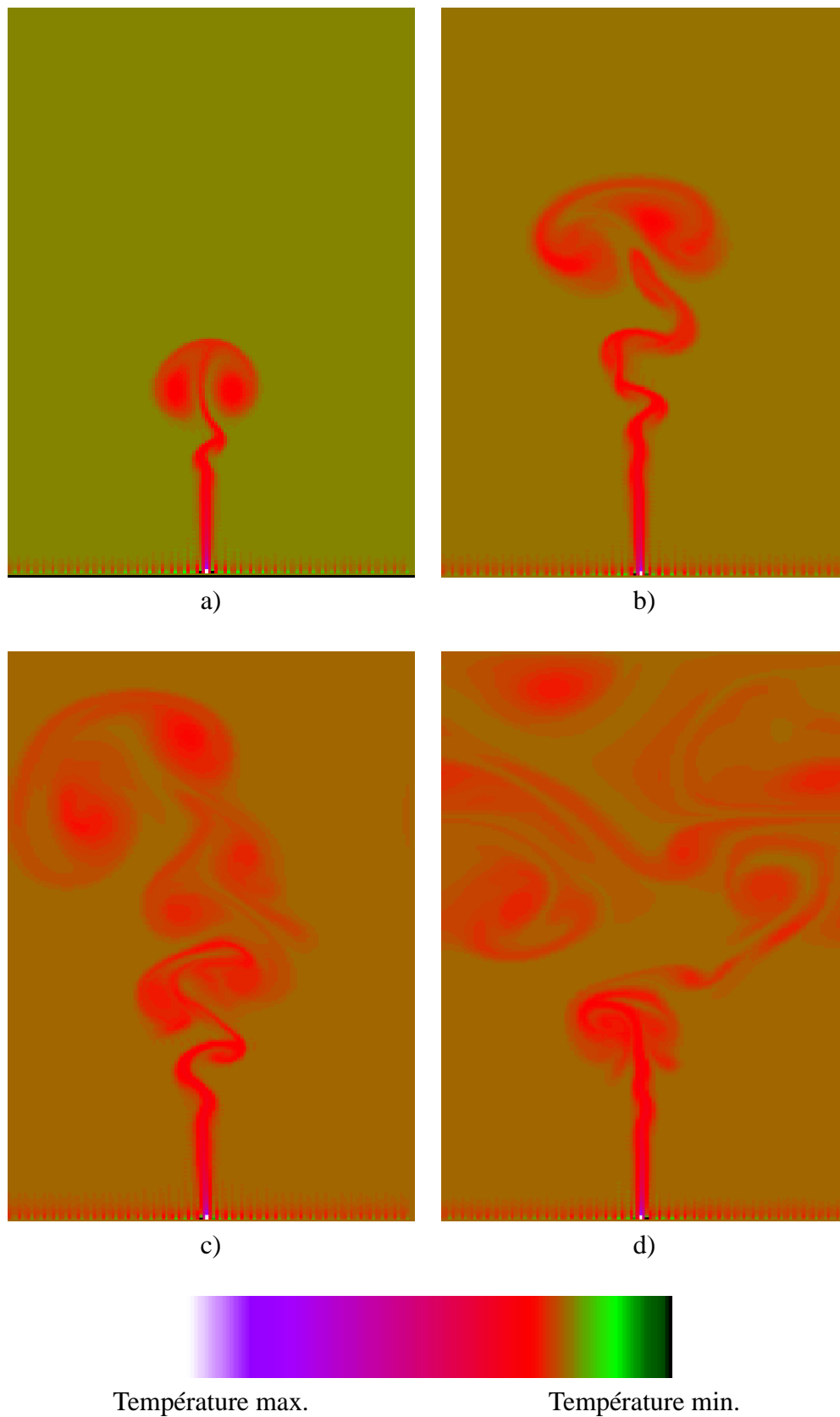


FIG. 4 – Simulation d'un plume thermique

et

$$\text{Ra} = \frac{\text{poussée d'Archimède}}{\text{perte par viscosité et diffusivité}} \quad (41)$$

$$= \frac{g\alpha\Delta T d^3}{\kappa\nu} \quad (42)$$

sont des nombres sans dimensions, le nombre de Prandtl et le nombre de Rayleigh respectivement (Tritton, 1988).

## 2.2 Les équations adjointes

En tenant compte de deux dimensions, nous écrivons les équations vectorielles (36) à (38) en les décomposant sous forme de leurs composantes  $x$  et  $y$ . Nous allons utiliser  $u$  pour la composante horizontale de la vitesse et  $v$  pour la composante verticale de la vitesse, i.e.  $\vec{v} = (u, v)$ .

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (43)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (44)$$

$$\frac{1}{\text{Pr}} \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (45)$$

$$\frac{1}{\text{Pr}} \left( \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial y} + u \frac{\partial v}{\partial x} \right) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \text{Ra} T \quad (46)$$

Maintenant, nous allons réarranger ces équations en réécrivant le terme d'advection de (44) :

$$\begin{aligned} & u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \\ &= u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + T \frac{\partial u}{\partial x} - T \frac{\partial u}{\partial x} + T \frac{\partial v}{\partial y} - T \frac{\partial v}{\partial y} \\ &= u \frac{\partial T}{\partial x} + T \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + T \frac{\partial v}{\partial y} - T \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial(uT)}{\partial x} + \frac{\partial(vT)}{\partial y} \end{aligned}$$

Le terme contenu dans la parenthèse n'est que la divergence qui est nulle en vertu de (43). Nous pouvons appliquer une méthode similaire au termes d'inertie de (45) et (46). Cette manipulation mathématique a été effectuée afin de nous simplifier la tâche lorsque nous prendrons la variation du lagrangien. Finalement, en mettant tous les termes sur le côté gauche de l'égalité, nous obtenons :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (47)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial(uT)}{\partial x} + \frac{\partial(vT)}{\partial y} - \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (48)$$

$$\frac{1}{\text{Pr}} \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} \right) + \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (49)$$

$$\frac{1}{\text{Pr}} \left( \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v^2}{\partial y} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} \right) + \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \text{Ra} T = 0 \quad (50)$$

Suite aux manipulations ci-dessus, nous pouvons construire le lagrangien :

$$\mathcal{L}(\vec{\Psi}, \vec{\lambda}) = J(\vec{\Psi}) + \int_0^T \int_{\Omega} \vec{\lambda}(\vec{x}, t) \cdot \mathcal{E}(\vec{\Psi}, \vec{x}, t) d\vec{x} dt \quad (51)$$

où  $J(\vec{\Psi})$  est la fonction coût,  $\mathcal{E}(\vec{\Psi}, \vec{x}, t)$  sont les équations physiques, et  $\vec{\lambda}(\vec{x}, t)$  sont les multiplicateurs indéterminés de Lagrange aussi appelés variables adjointes (Sanders & Katopodes, 1999). Le lagrangien du panache thermique est :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \int_{\Omega} \int_{t_1}^{t_2} J + P^* \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right] \\ & + T^* \left[ \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial(uT)}{\partial x} + \frac{\partial(vT)}{\partial y} - \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right] \\ & + u^* \left[ \frac{1}{\text{Pr}} \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} \right) + \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] \\ & + v^* \left[ \frac{1}{\text{Pr}} \left( \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v^2}{\partial y} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} \right) + \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \text{Ra} T \right] dt d\vec{x} \end{aligned} \quad (52)$$

où les variables adjointes sont données par  $P^*$ ,  $T^*$ ,  $u^*$  et  $v^*$  et  $J$  est une fonction coût que nous choisissons. Par exemple, si on veut prédire la température  $T$ , nous avons :

$$J = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_{t_1}^{t_2} (T - T_{\text{obs}}) \mathbf{R}^{-1} (T - T_{\text{obs}}) dt d\vec{x} \quad (53)$$

où  $T$  est la température prédite,  $T_{\text{obs}}$  est la température observée et  $\mathbf{R}^{-1}$  est une matrice contenant les covariances de l'erreur sur les observations. En multipliant les variables adjointes, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \int_{\Omega} \int_{t_1}^{t_2} J + P^* \frac{\partial u}{\partial x} + P^* \frac{\partial v}{\partial y} \\ & + T^* \frac{\partial T}{\partial t} + T^* \frac{\partial(uT)}{\partial x} + T^* \frac{\partial(vT)}{\partial y} - T^* \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - T^* \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \\ & + \frac{1}{\text{Pr}} \left( u^* \frac{\partial u}{\partial t} + u^* \frac{\partial u^2}{\partial x} + u^* \frac{\partial(uv)}{\partial y} \right) + u^* \frac{\partial P}{\partial x} - u^* \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u^* \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ & + \frac{1}{\text{Pr}} \left( v^* \frac{\partial v}{\partial t} + v^* \frac{\partial v^2}{\partial y} + v^* \frac{\partial(uv)}{\partial x} \right) + v^* \frac{\partial P}{\partial y} - v^* \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - v^* \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \\ & - \text{Ra} T v^* dt d\vec{x} \end{aligned} \quad (54)$$

La prochaine étape consiste à transférer l'opérateur différentielle de la variable réelle à la variable adjointe. Cela se fait en appliquant l'intégration par parties à chaque terme du lagrangien (54). Nous avons donc :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & \int_{\Omega} \int_{t_1}^{t_2} J - u \frac{\partial P^*}{\partial x} - v \frac{\partial P^*}{\partial y} \\
& - T \frac{\partial T^*}{\partial t} - uT \frac{\partial T^*}{\partial x} - vT \frac{\partial T^*}{\partial y} - T \frac{\partial^2 T^*}{\partial x^2} - T \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^2} \\
& - \frac{u}{\text{Pr}} \frac{\partial u^*}{\partial t} - \frac{u^2}{\text{Pr}} \frac{\partial u^*}{\partial x} - \frac{uv}{\text{Pr}} \frac{\partial u^*}{\partial y} - P \frac{\partial u^*}{\partial x} - u \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} - u \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \\
& - \frac{v}{\text{Pr}} \frac{\partial v^*}{\partial t} - \frac{v^2}{\text{Pr}} \frac{\partial v^*}{\partial y} - \frac{uv}{\text{Pr}} \frac{\partial v^*}{\partial x} - P \frac{\partial v^*}{\partial y} - v \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^2} - v \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^2} \\
& - \text{Ra} T v^* dt d\vec{x} + b
\end{aligned} \tag{55}$$

où

$$\begin{aligned}
b = & \int_{\Omega} \left( \frac{1}{\text{Pr}} (uu^* + vv^*) + TT^* \right) \Big|_{t_1}^{t_2} d\vec{x} \\
& + \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{1}{\text{Pr}} (u^2 u^* + uvv^*) + uP^* + u^*P - u^* \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial u^*}{\partial x} \right. \\
& \left. - v^* \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v^*}{\partial x} + uTT^* - T^* \frac{\partial T}{\partial x} + T \frac{\partial T^*}{\partial x} \right) \Big|_{L_x}^0 \\
& + \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{1}{\text{Pr}} (v^2 v^* + uvu^*) + vP^* + v^*P - u^* \frac{\partial u}{\partial y} + u \frac{\partial u^*}{\partial y} \right. \\
& \left. - v^* \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial v^*}{\partial y} + vTT^* - T^* \frac{\partial T}{\partial y} + T \frac{\partial T^*}{\partial y} \right) \Big|_{L_y}^0
\end{aligned} \tag{56}$$

Ensuite, nous utilisons l'opérateur variationnelle donné par :

$$\begin{aligned}
\delta \mathcal{L} = & \vec{\nabla}_{\vec{\Psi}} \mathcal{L} \cdot \delta \vec{\Psi} + \vec{\nabla}_{\vec{\lambda}} \mathcal{L} \cdot \delta \vec{\lambda} \\
= & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{\Psi}} \delta \vec{\Psi} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{\lambda}} \delta \vec{\lambda}
\end{aligned} \tag{57}$$

pour obtenir la variationnelle du lagrangien (55). Le terme dépendant des conditions aux frontières (56) disparaît. Nous nous retrouvons donc avec :

$$\begin{aligned}
\delta \mathcal{L} = & \int_{\Omega} \int_{t_1}^{t_2} \delta P \left[ \frac{\partial J}{\partial P} - \frac{\partial u^*}{\partial x} - \frac{\partial v^*}{\partial y} \right] \\
& + \delta u \left[ \frac{\partial J}{\partial u} - \frac{1}{\text{Pr}} \left( \frac{\partial u^*}{\partial t} + 2u \frac{\partial u^*}{\partial x} + v \frac{\partial u^*}{\partial y} + v \frac{\partial v^*}{\partial x} \right) \right. \\
& \left. - \frac{\partial P^*}{\partial x} - \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} - T \frac{\partial T^*}{\partial x} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \delta v \left[ \frac{\partial J}{\partial v} - \frac{1}{\text{Pr}} \left( \frac{\partial v^*}{\partial t} + 2v \frac{\partial v^*}{\partial y} + u \frac{\partial v^*}{\partial x} + u \frac{\partial u^*}{\partial y} \right) \right. \\
& \quad \left. - \frac{\partial P^*}{\partial y} - \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^2} - T \frac{\partial T^*}{\partial y} \right] \\
& + \delta T \left[ \frac{\partial J}{\partial T} - \frac{\partial T^*}{\partial t} - u \frac{\partial T^*}{\partial x} - v \frac{\partial T^*}{\partial y} \right. \\
& \quad \left. - \frac{\partial^2 T^*}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^2} - \text{Rav}^* \right] dt d\vec{x} \\
& + \delta b
\end{aligned} \tag{58}$$

où  $\delta b$  est :

$$\begin{aligned}
\delta b & = \int_{\Omega} \left( \frac{1}{\text{Pr}} (\delta u u^* + \delta v v^*) + \delta T T^* \right) \Big|_{t_1}^{t_2} d\vec{x} \\
& + \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{1}{\text{Pr}} (2u \delta u u^* + \delta u v v^* + u \delta v v^*) + \delta u P^* + u^* \delta P - u^* \frac{\partial \delta u}{\partial x} + \delta u \frac{\partial u^*}{\partial x} \right. \\
& \quad \left. - v^* \frac{\partial \delta v}{\partial x} + \delta v \frac{\partial v^*}{\partial x} + \delta u T T^* + u \delta T T^* - T^* \frac{\partial \delta T}{\partial x} + \delta T \frac{\partial T^*}{\partial x} \right) \Big|_{L_x}^0 \\
& + \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{1}{\text{Pr}} (2v \delta v v^* + \delta u v u^* + u \delta v u^*) + \delta v P^* + v^* \delta P - u^* \frac{\partial \delta u}{\partial y} + \delta u \frac{\partial u^*}{\partial y} \right. \\
& \quad \left. - v^* \frac{\partial \delta v}{\partial y} + \delta v \frac{\partial v^*}{\partial y} + \delta v T T^* + v \delta T T^* - T^* \frac{\partial \delta T}{\partial y} + \delta T \frac{\partial T^*}{\partial y} \right) \Big|_{L_y}^0
\end{aligned} \tag{59}$$

Puisque nous cherchons un minimum, nous exigeons que  $\delta \mathcal{L} = 0$  et nous obtenons les équations adjointes que nous résolvons de  $t_2$  à  $t_1$  :

$$\frac{\partial J}{\partial P} - \frac{\partial u^*}{\partial x} - \frac{\partial v^*}{\partial y} = 0 \tag{60}$$

$$\frac{\partial J}{\partial u} - \frac{1}{\text{Pr}} \left( \frac{\partial u^*}{\partial t} + 2u \frac{\partial u^*}{\partial x} + v \frac{\partial u^*}{\partial y} + v \frac{\partial v^*}{\partial x} \right) - \frac{\partial P^*}{\partial x} - \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} - T \frac{\partial T^*}{\partial x} = 0 \tag{61}$$

$$\frac{\partial J}{\partial v} - \frac{1}{\text{Pr}} \left( \frac{\partial v^*}{\partial t} + 2v \frac{\partial v^*}{\partial y} + u \frac{\partial v^*}{\partial x} + u \frac{\partial u^*}{\partial y} \right) - \frac{\partial P^*}{\partial y} - \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^2} - T \frac{\partial T^*}{\partial y} = 0 \tag{62}$$

$$\frac{\partial J}{\partial T} - \frac{\partial T^*}{\partial t} - u \frac{\partial T^*}{\partial x} - v \frac{\partial T^*}{\partial y} - \frac{\partial^2 T^*}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^2} - \text{Rav}^* = 0 \tag{63}$$

avec leur conditions initiales :

$$\begin{aligned}
\delta u(x, y, t|_{t_1}) & = 0 & u^*(x, y, t|_{t_2}) & = 0 \\
\delta v(x, y, t|_{t_1}) & = 0 & v^*(x, y, t|_{t_2}) & = 0 \\
\delta T(x, y, t|_{t_1}) & = 0 & T^*(x, y, t|_{t_2}) & = 0 \\
\delta P(x, y, t|_{t_1}) & = 0 & P^*(x, y, t|_{t_2}) & = 0
\end{aligned} \tag{64}$$

et leurs conditions aux frontières :

$$\begin{aligned}
 u^*(0, y, t) &= 0 & u^*(L_x, y, t) &= 0 \\
 v^*(0, y, t) &= 0 & v^*(L_x, y, t) &= 0 \\
 T^*(0, y, t) &= 0 & T^*(L_x, y, t) &= 0 \\
 P^*(0, y, t) &= 0 & P^*(L_x, y, t) &= 0
 \end{aligned} \tag{65}$$

$$\begin{aligned}
 u^*(x, 0, t) &= 0 & u^*(x, L_y, t) &= 0 \\
 v^*(x, 0, t) &= 0 & v^*(x, L_y, t) &= 0 \\
 T^*(x, 0, t) &= 0 & T^*(x, L_y, t) &= 0 \\
 P^*(x, 0, t) &= 0 & P^*(x, L_y, t) &= 0
 \end{aligned} \tag{66}$$

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{\partial u^*}{\partial x} \right|_{x=0} &= 0 & \left. \frac{\partial u^*}{\partial y} \right|_{y=0} &= 0 \\
 \left. \frac{\partial v^*}{\partial x} \right|_{x=0} &= 0 & \left. \frac{\partial v^*}{\partial y} \right|_{y=0} &= 0 \\
 \left. \frac{\partial T^*}{\partial x} \right|_{x=0} &= 0 & \left. \frac{\partial T^*}{\partial y} \right|_{y=0} &= 0 \\
 \left. \frac{\partial u^*}{\partial x} \right|_{x=L_x} &= 0 & \left. \frac{\partial u^*}{\partial y} \right|_{y=L_y} &= 0 \\
 \left. \frac{\partial v^*}{\partial x} \right|_{x=L_x} &= 0 & \left. \frac{\partial v^*}{\partial y} \right|_{y=L_y} &= 0 \\
 \left. \frac{\partial T^*}{\partial x} \right|_{x=L_x} &= 0 & \left. \frac{\partial T^*}{\partial y} \right|_{y=L_y} &= 0
 \end{aligned} \tag{67}$$

### 3 Prospection électrique

Nous allons d'abord comparer la méthode 4D-VAR à une méthode d'inversion électrique. Cette étude intéresse le groupe de Géophysique industrielle du CERCA.

**Contraintes** Dans les deux méthodes, les équations physiques jouent le rôle de contraintes du problème de minimisation. Pour la méthode 4D-VAR, dans notre cas, ces contraintes sont les équations de Saint-Venant avec sédiments tandis que dans la méthode inverse la contrainte est l'équation de Gauss pour le champs électrique :

$$\vec{\nabla} \cdot (\sigma \vec{\nabla} V) = -I \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z - z_0) \tag{68}$$

où  $\sigma$  est la conductivité électrique,  $V$  est le potentiel électrique,  $I$  est le courant électrique et  $\delta$  est la fonction de Dirac (Boulangier, 2001).

**Fonction à minimiser** La méthode 4D-VAR nécessite la minimisation d'une fonction coût qui est la différence entre les prédictions ( $\mathbf{H}\vec{\Psi}$ ) et les observations ( $\vec{\Psi}^0$ ):

$$J(\vec{\Psi}) = \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} (\mathbf{H}\vec{\Psi} - \vec{\Psi}^0)^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{H}\vec{\Psi} - \vec{\Psi}^0) d\vec{x} dt \quad (69)$$

où  $\mathbf{R}$  est la matrice de covariance des erreurs d'observation. L'inversion électrique est faite en minimisant une fonction  $L(\rho, c)$ :

$$L(\rho, c) = \frac{1}{2} (\rho - \rho^0)^T Q_{\rho} (\rho - \rho^0) + c(v - a(\rho))^T Q_v (v - a(\rho)) \quad (70)$$

où  $\rho$  est la résistivité électrique,  $\rho^0$  est une résistivité de référence,  $Q_{\rho}$  est l'inverse de la matrice de covariance des paramètres,  $c$  est un coefficient scalaire,  $v$  est les données observées,  $a(\rho)$  est l'opérateur non-linéaire de modélisation directe et  $Q_v$  est l'inverse de la matrice de covariance des erreurs d'observation (Boulangier, 2001). Le deuxième terme de (70) est équivalent à (69) avec  $Q_v \equiv \mathbf{R}^{-1}$ .

**Variables de contrôle** Les variables de contrôle sont les variables que l'on va varier afin de résoudre le problème de minimisation. Dans la méthode 4D-VAR, les variables de contrôle sont les conditions initiales ( $h_0$ ,  $\vec{v}_0$  et  $z_0$  pour Saint-Venant). Quant à la méthode inverse, c'est la résistivité ( $\rho = 1/\sigma$ ) et le coefficient scalaire  $c$  que l'on doit varier.

**Senseurs** Il est important de considérer les senseurs utilisés pour prendre les mesures. Dans le cas de la méthode 4D-VAR appliqué aux rivières, les senseurs sont fixes et la rivière défile. Dans la prospection, la route ou le terrain sont fixes et ce sont les senseurs que l'on déplace. En s'inspirant du principe de relativité galiléen, nous pouvons considérer que les deux situations sont similaires, c'est-à-dire que nous pouvons supposer que la route défile sous les senseurs comme le fait la rivière.

Il est aussi possible de généraliser cet approche à d'autres méthodes de prospection géologique comme l'inversion gravimétrique (Boulangier & Chouteau, 2001) ou bien à des problème d'inversion touchant d'autre domaine des sciences appliquées.

## Références

- Boulanger, O. (2001). Imagerie gravimétrique et électrique 3D. Présentation CERCA (Géophysique appliquée).
- Boulanger, O. & Chouteau, M. (2001). Constraints in 3D gravity inversion. *Geophysical Prospecting*, 49, 265–280.
- Burgers, J. M. (1948). A mathematical model illustrating the theory of turbulence. *Advances in Applied Mechanics*, 1, 171–199.
- Burgers, J. M. (1974). *The Nonlinear Diffusion Equation*. Dordrecht : Reidel.
- Carlsson, J. (1997). *The Monte-Carlo method – a cookbook approach*. Rapport technique, Alfvén Laboratory, Royal Institute of Technology, Stockholm.
- Finlayson, B. A. (1992). *Numerical methods for Problems with Moving Fronts*, chapitre 3, (pp. 50–54). Ravenna Park Publishing : Seattle.
- Haberman, R. (1977). *Mathematical models : mechanical vibrations, population dynamics, and traffic flow, an introduction to applied mathematics*. Prentice-Hall.
- Kalnay, E., Ki Park, S., Pu, Z.-X., & Gao, J. (2000). Application of the quasi-inverse method to data assimilation. *Monthly Weather Review*, 128(3), 864–875.
- Kardar, M., Parisi, G., & Zhang, Y.-C. (1986). Dynamic scaling of growing interfaces. *Physical Review Letters*, 56(9), 889–892.
- Newell, G. F. (1993). A simplified theory of kinematic waves in highway traffic, Part I : General theory. *Transportation Res.-B*, 27B(4), 281–287.
- Sanders, B. F. & Katopodes, N. D. (1999). Control of canal flow by adjoint sensitivity method. *Journal of irrigation and drainage engineering*, 125(5), 287–297.
- Tritton, D. J. (1988). *Physical Fluid Dynamics*. Oxford University Press, 2<sup>e</sup>édition.