

Étude de faisabilité pour l'application de l'assimilation de données (4D-VAR) à la prospection électrique

Rapport Interne CERCA R2002-82

Eric Bélanger

Centre de recherche en calcul appliqué (CERCA)
Département de Physique, Université de Montréal

26 septembre 2002

Résumé

Présentement, le problème de prospection, soit la détermination de la structure du sol, est résolu avec des méthodes inverses. Dans cette étude, nous allons proposer une application de l'assimilation de données variationnelle quadridimensionnelle (4D-VAR) à la prospection électrique notamment pour les sondages verticaux. Ce travail intéresse le projet d'auscultation des infrastructures routières du CERCA.

1 Introduction

La prospection des sols et des structures en béton est exécutée comme suit. Les propriétés électriques, magnétiques ou gravimétriques du sol sont mesurées à l'aide de senseurs. Ces données sont ensuite utilisées par des méthodes inverses afin de reconstruire la structure du sol ou des ouvrages en béton. La prospection du sol sert, entre autre, à la découverte de gisements métallifères et pétrolifères tandis que la prospection des ouvrages en béton sert à détecter les failles dans les ponts et les barrages hydroélectriques. Comme l'assimilation de données possède une certaine similarité avec les méthodes d'inversion (Talagrand, 1997), l'idée d'utiliser les techniques d'assimilation de données en prospection a récemment été avancée (Egbert, 2002). L'assimilation de données présente un avantage sur les méthodes d'inversion notamment l'inversion électromagnétique parce qu'on peut également y inclure le temps.

La technique 4D-VAR consiste à minimiser une fonction coût, soit la différence entre les observations et les données calculées. Le gradient de cette fonction coût est obtenu grâce à une formulation lagrangienne avec les équations physiques agissant à titre de contraintes. Ensuite, ce gradient est utilisé dans un algorithme de minimisation comme la plus profonde descente, le gradient conjugué ou le quasi-Newton afin de trouver le minimum. De cette façon, nous obtenons des données calculées qui se rapprochent le plus possible des observations.

2 La prospection à conduction de courant DC

Dans le but de mesurer la résistivité du sol, on doit y insérer des électrodes (senseurs). Nous allons disposer les électrodes selon la configuration Schlumberger (fig. 1) même si plusieurs autres configurations sont possibles. En injectant un courant I par les électrodes A et B , nous pouvons mesurer une différence de potentiel avec les électrodes M et N . Cette différence de potentiel variera selon la structure du sol. Comme nous connaissons le courant et la différence de potentiel, nous pouvons calculer la résistivité apparente (ρ_a) du sol. La résistivité apparente est définie comme la résistivité que l'on obtiendrait pour un sol homogène avec le même courant et la même disposition des électrodes (Chouteau, 2001). En changeant la distance AB , tout en gardant les électrodes M et N fixes, nous pouvons déterminer la valeur de ρ_a en fonction de la distance L ($L = \frac{AB}{2}$). La courbe ainsi obtenue peut être interprétée de façon à obtenir un modèle de la structure souterraine (Chouteau, 2001).

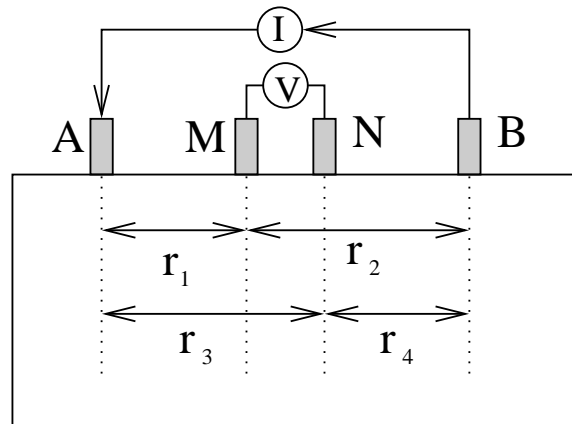


FIG. 1 – Disposition des senseurs selon la configuration de Schlumberger (Chou-
teau, 2001)

Dans le but de tracer la courbe de résistivité apparente, nous utilisons la loi d’Ohm qui relie un courant électrique I à la différence de voltage V obtenue :

$$V = IR \quad (1)$$

où R est la résistance. La résistance mesure l’opposition d’un matériau envers le courant électrique. Elle dépend du type de matériau et de la géométrie :

$$R = \rho \frac{L}{A} \quad (2)$$

où ρ est la résistivité du matériau, L et A sont la longueur et l’aire de la section de l’échantillon traversé par le courant, respectivement (Chouateau, 2001). En combinant les équations (1) et (2), nous obtenons :

$$V = I\rho \frac{L}{A}. \quad (3)$$

Lors de l’examen des sols, le courant se propage dans une hémisphère. L’aire de la région étudiée est alors la surface de cette hémisphère :

$$\begin{aligned} V &= I\rho \frac{r}{2\pi r^2} \\ &= \frac{I\rho}{2\pi r}. \end{aligned} \quad (4)$$

Le potentiel mesuré au point M est donné par :

$$\begin{aligned} V_M &= V_1 + V_2 \\ &= \frac{I\rho}{2\pi r_1} + \frac{-I\rho}{2\pi r_2} \\ &= \frac{I\rho}{2\pi} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \end{aligned} \quad (5)$$

où V_1 est le potentiel dû à l'électrode A et V_2 est le potentiel dû à l'électrode B (fig. 1). De la même façon, le potentiel mesuré au point N est :

$$V_N = \frac{I\rho}{2\pi} \left(\frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_4} \right). \quad (6)$$

Donc, la différence de voltage est :

$$\begin{aligned} \Delta V &= V_M - V_N \\ &= \frac{I\rho}{2\pi} \left[\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) - \left(\frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_4} \right) \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

Nous pouvons ainsi obtenir une équation pour la résistivité apparente :

$$\rho_a = \frac{\Delta V}{I} \frac{2\pi}{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) - \left(\frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_4} \right)} \quad (8)$$

en fonction du courant injecté, de la différence de potentiel observée et de la distance entre les électrodes (Chouteau, 2001).

Quant à la distribution du potentiel dans le sol, celui-ci peut être donnée par trois relations (éqs. 9, 10, 11) (Oldenburg et al., 1998). Il y a la loi d'Ohm (soit éq. (1) réécrite) :

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (9)$$

où \vec{J} est la densité de courant, σ est la conductivité électrique ($\sigma = \frac{1}{\rho}$) et \vec{E} est le champ électrique. Nous assumons que le champ électrique est le gradient d'un potentiel, V , :

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V. \quad (10)$$

La divergence de la densité de courant est égale au taux de changement de la densité de charge, Q , :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\frac{\partial Q}{\partial t}. \quad (11)$$

En insérant (10) dans (9), nous obtenons $\vec{J} = \sigma \vec{\nabla} V$. En utilisant le résultat précédent, nous pouvons réécrire 11 :

$$\vec{\nabla} \cdot (\sigma \vec{\nabla} V) = -\frac{\partial Q}{\partial t}. \quad (12)$$

Puisque la densité de charge est nulle sauf à l'endroit, r_0 , où le courant, I , est introduit dans le sol (Oldenburg et al., 1998), on réécrit l'équation (12) :

$$\vec{\nabla} \cdot (\sigma \vec{\nabla} V) = -I\delta(r - r_0) \quad (13)$$

avec la fonction de Dirac $\delta(\dots)$. L'équation (13) nous permettra de résoudre, dans la prochaine section, le problème direct.

3 La méthode du 4D-VAR

Après avoir mesuré la résistivité apparente du sol à l'aide des électrodes comme il a été expliqué dans la section précédente (fig. 2(a)), nous voulons retrouver la structure du sol qui nous est inconnue (fig. 2(b)). Comme la résolution de l'équation (13) nécessite la connaissance de la résistivité du sol pour calculer la distribution du potentiel, le problème représenté par la figure (2) est mal posé : c'est un problème inverse ou adjoint.

Quant au problème direct, il peut être traité comme suit. D'abord, nous construisons une ébauche de la distribution de la résistivité. Cette ébauche se fait à partir de l'apparence de la courbe de résistivité apparente et des autres informations que l'on possède à propos du sol sous étude. Plus l'ébauche ressemblera à la réalité, plus rapide et efficace sera le processus d'obtention des résultats. L'équation (13) nous permet, à partir d'une coupe du sol telle l'ébauche (fig. 3(a)), de déterminer la distribution du potentiel à la surface du sol pour une disposition spécifique des électrodes. Nous pouvons alors tracer la courbe de résistivité apparente pour l'ébauche (fig. 3(b)).

3.1 La fonction coût

Lorsqu'on compare les résistivités apparentes obtenues à l'aide du calcul du problème direct et des mesures prises sur le terrain, nous notons, bien sûr, une erreur (fig. 4).

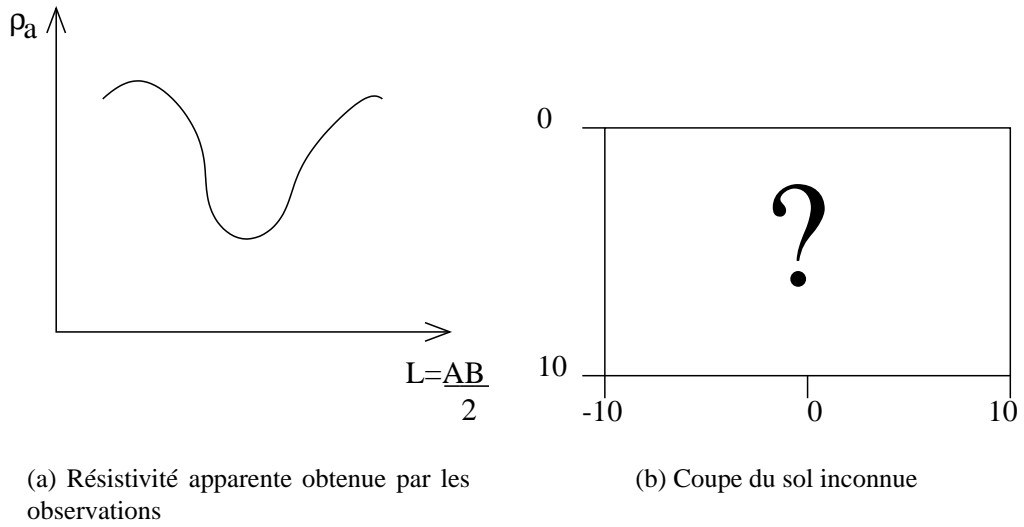


FIG. 2 – Problème inverse (adjoint)

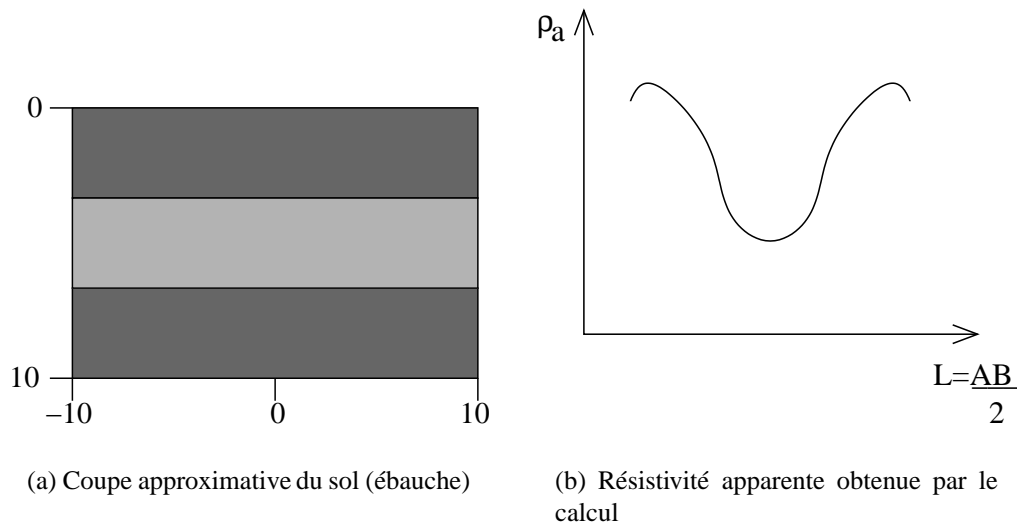


FIG. 3 – Problème direct

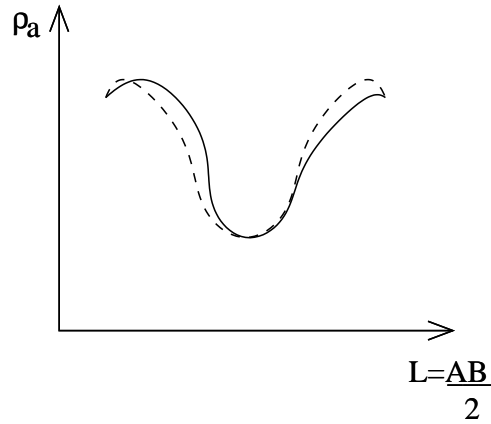


FIG. 4 – Comparaison entre les résistivités apparentes calculées (- -) et mesurées (—)

Cette différence entre les calculs et les observations peut être exprimée mathématiquement par la définition d'une fonction coût :

$$J = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\rho_a - \rho_a^{\text{obs}}) W (\rho_a - \rho_a^{\text{obs}}) d\vec{x} \quad (14)$$

où Ω représente le domaine sous examen avec une longueur L_x et une profondeur L_y , ρ_a est la résistivité apparente calculée, ρ_a^{obs} est la résistivité apparente observée, et W est une matrice de poids statistiques. De façon plus pratique, on peut écrire l'équation (14) :

$$J = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (\rho_{a_i} - \rho_{a_i}^{\text{obs}}) W_i (\rho_{a_i} - \rho_{a_i}^{\text{obs}}). \quad (15)$$

Nous avons discrétisé le sous-sol en utilisant N points sur la grille de calcul. La matrice de poids statistiques contient les erreurs dans les observations :

$$W_i = \frac{1}{\varepsilon_i} \quad (16)$$

où ε est la déviation standard des observations (Oldenburg et al., 1998). Cette matrice sert à donner une plus grande importance aux données mesurées avec une plus grande précision.

3.2 L'équation adjointe

L'objectif de la méthode du 4D-VAR est de minimiser la fonction coût (éq. 14) tout en obéissant à l'équation (13) qui agit en tant que contrainte. C'est un problème de minimisation avec contrainte (Talagrand & Courtier, 1987) que l'on résoudra en utilisant le lagrangien du système :

$$\mathcal{L} = J + \int_{\Omega} \lambda \cdot \left[\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} V \right) + I\delta(r - r_0) \right] d\vec{x} \quad (17)$$

où J est la fonction coût et λ est un multiplicateur indéterminé de Lagrange aussi appelé variable adjointe (Sanders & Katopodes, 1999). Il a été démontré que trouver les points stationnaires de la fonction coût sous la contrainte (éq. 13) est équivalent à trouver les points stationnaires du lagrangien par rapport aux variables V et λ (Le Dimet & Talagrand, 1986). Pour accomplir cette tâche, nous appliquons l'opérateur variationnel δ au lagrangien (Daley, 1991). En prenant la variation du lagrangien, nous obtenons :

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial V}\delta V + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\lambda}\delta\lambda \quad (18)$$

Pour un déplacement $(\delta V, \delta\lambda)$ arbitraire, nous sommes à un minimum seulement si $\delta\mathcal{L} = 0$ (Daley, 1991) :

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\lambda} = \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} V \right) + I\delta(r - r_0) = 0 \quad (19)$$

et

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial V} = \text{Adj}(\lambda) + \frac{\partial J}{\partial V} = 0 \quad (20)$$

où $\text{Adj}(\lambda)$ représente l'équation adjointe après avoir appliqué l'intégration par parties (Schröter et al., 1993). Les équations (19) et (20) sont les équations de Euler-Lagrange (Le Dimet & Talagrand, 1986).

Malheureusement, ces équations ne peuvent être résolues facilement. Il faut donc reformuler le problème en une minimisation sans contrainte (Talagrand & Courtier, 1987). Puisque la courbe de la résistivité apparente du sol est déterminée par la distribution de résistivité, la fonction coût est une fonction implicite de la distribution de résistivité dans le sol. Il est alors possible de trouver la solution de (13) qui minimisera la fonction coût en variant l'ébauche de la distribution de résistivité du sol (Ehrendorfer, 1992) qui est, ici, la variable de contrôle. Les

variables de contrôle sont les variables (conditions initiales, conditions aux frontières ou paramètres) que l'on varie afin de résoudre le problème de minimisation (Lions, 1968). Comme la plupart des algorithmes de minimisation nécessitent le gradient de la fonction coût par rapport aux variables de contrôle, ce dernier est obtenu par la résolution des équations adjointes (Courtier & Talagrand, 1990).

L'équation adjointe de ce problème est dérivée comme suit à partir du lagrangien (éq. 17) :

$$\mathcal{L} = J + \int_{\Omega} \lambda \cdot \left[\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} V \right) + I \delta(r - r_0) \right] d\vec{x} \quad (21)$$

En développant le premier terme de (13), nous obtenons :

$$\mathcal{L} = J + \int_{\Omega} \lambda \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\rho} \right) + \lambda I \delta(r - r_0) d\vec{x} \quad (22)$$

En multipliant le multiplicateur de Lagrange λ , nous avons :

$$\mathcal{L} = J + \int_{\Omega} \lambda \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \lambda \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\rho} + \lambda \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \lambda \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\rho} + \lambda I \delta(r - r_0) d\vec{x} \quad (23)$$

Ensuite, afin de transférer les dérivées des variables réelles aux variables adjointes, nous intégrons par parties l'équation (23) :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = J + \int_{\Omega} & V \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\lambda}{\rho} \right) - V \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\rho} \right) + V \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\lambda}{\rho} \right) - V \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\rho} \right) \\ & + \lambda I \delta(r - r_0) d\vec{x} + b \end{aligned} \quad (24)$$

où

$$\begin{aligned} b = & \frac{\lambda}{\rho} \frac{\partial V}{\partial x} \Big|_{L_x} - V \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\lambda}{\rho} \right) \Big|_{L_x} + V \lambda \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho} \right) \Big|_{L_x} \\ & + \frac{\lambda}{\rho} \frac{\partial V}{\partial y} \Big|_{L_y} - V \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\lambda}{\rho} \right) \Big|_{L_y} + V \lambda \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\rho} \right) \Big|_{L_y} \end{aligned} \quad (25)$$

La variation du lagrangien (éq. 24) est :

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} = & \int_{\Omega} \delta V \left[\frac{\partial J}{\partial V} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\lambda}{\rho} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\rho} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\lambda}{\rho} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\rho} \right) \right] d\vec{x} \\ & + \delta b \end{aligned} \quad (26)$$

où $\frac{\partial J}{\partial V}$ est donné par :

$$\frac{\partial J}{\partial V} = \frac{\partial J}{\partial \rho_a} \frac{\partial \rho_a}{\partial V}. \quad (27)$$

Notons que les dérivées $\frac{\partial J}{\partial \rho_a}$ et $\frac{\partial \rho_a}{\partial V}$ sont obtenues en dérivant la fonction coût (14) et la courbe de résistivité apparente (8), respectivement. Nous obtenons également un terme δb donné par :

$$\begin{aligned} \delta b &= \left(\frac{\lambda}{\rho} \frac{\partial \delta V}{\partial x} - \delta V \frac{\partial \lambda}{\partial x} \frac{1}{\rho} + \delta V \lambda \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\rho} \right) \Big|_{L_x}^0 \\ &+ \left(\frac{\lambda}{\rho} \frac{\partial \delta V}{\partial y} - \delta V \frac{\partial \lambda}{\partial y} \frac{1}{\rho} + \delta V \lambda \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\rho} \right) \Big|_{L_y}^0 \end{aligned} \quad (28)$$

En insistant que $\delta \mathcal{L} = 0$, nous obtenons l'équation adjointe :

$$\frac{\partial J}{\partial V} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\lambda}{\rho} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\rho} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\lambda}{\rho} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\rho} \right) = 0 \quad (29)$$

avec ses conditions aux frontières données par $\delta b = 0$:

$$\begin{aligned} \lambda(0, y) &= 0, & \lambda(L_x, y) &= 0 \\ \lambda(x, 0) &= 0, & \lambda(x, L_y) &= 0 \end{aligned} \quad (30)$$

Enfin, le gradient de la fonction coût par rapport à la distribution de densité du sol est déterminé par la valeur de la variable adjointe λ après avoir résolu l'équation adjointe (éq. 29).

4 Algorithme de minimisation

La fonction coût et son gradient sont utilisés dans un algorithme de minimisation afin de trouver le minimum. Il y existe une variété d'algorithmes comme la plus profonde descente, le gradient conjugué ou le quasi-Newton. La plus profonde descente est facile à programmer, mais elle converge linéairement (Burden & Faires, 1993; Daniels, 1978) tandis que le gradient conjugué et le quasi-Newton sont plus complexes mais convergent plus rapidement (Buchanan & Turner, 1992; Press et al., 1992). Ces méthodes, qui se ressemblent plus ou moins, peuvent être décrites comme suit. Nous évaluons d'abord la fonction coût en utilisant l'ébauche

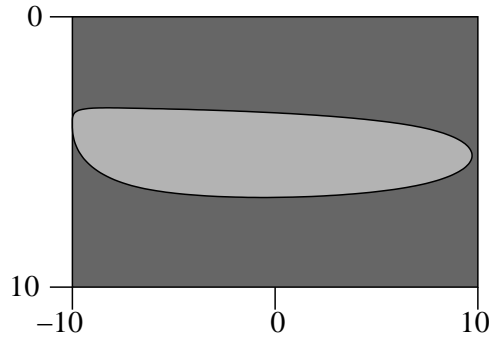


FIG. 5 – Coupe du sol réelle

estimée dans la section 3 (ρ_0). Ensuite, nous cherchons la direction où la fonction coût diminue le plus afin de se diriger vers le minimum. Nous voulons itérer :

$$\rho_{k+1} = \rho_k - \alpha_k \vec{p}_k \quad (31)$$

où k est l'index d'itération, α_k est la longueur du pas que nous allons effectuer et \vec{p}_k est la direction de recherche. Dans le cas de la plus profonde descente, cette direction est le sens opposé du gradient ($\vec{p}_k = -\vec{\nabla}J$). Pour la méthode de Newton, nous devons résoudre le système $Q\vec{p}_k = -\vec{\nabla}J$ où Q est la matrice hessienne tandis que le quasi-Newton $S\vec{p}_k = -\vec{\nabla}J$ où S est une approximation de la matrice hessienne (Kalnay et al., 2000). On évalue J au nouveau point ρ_{k+1} . Si $J(\rho_{k+1}) < J(\rho_k)$, on accepte ρ_{k+1} et k est incrémenter à $k + 1$. D'un autre côté, si $J(\rho_{k+1}) > J(\rho_k)$ on refuse ρ_{k+1} et on recalcule (31) pour le même k mais avec un α_k plus petit. On continue l'itération jusqu'à ce que le gradient atteigne la valeur souhaitée ($\vec{\nabla}J \approx 0$) (Burden & Faires, 1993). Suite à la minimisation, nous connaissons la structure interne du sol en terme de distribution de résistivité (fig. 5).

5 Conclusion

Il est également possible de généraliser cette approche à d'autres méthodes de prospections géologique comme l'inversion électromagnétique ou gravimétrique (Boulanger & Chouteau, 2001) ou bien à des problème d'inversion touchant d'autres domaines des sciences appliquées. Nous espérons que ce rapport servira de base pour une demande de financement qui permettrait de mener une étude plus approfondie au CERCA dans le cadre du projet de Géophysique industrielle d'auscultation des ouvrages en béton.

Remerciements

Nous voudrions remercier Michel Chouteau pour avoir encouragé cette étude. Nous remercions également Jean-Jacques Rousseau Président Directeur Général du CERCA et Badis Bésbés du CERCA pour l'appui financier. Je remercie également Alain Vincent pour avoir aidé à la rédaction et David Yuen pour avoir également fortement encouragé ce projet.

Références

- Boulangier, O. & Chouteau, M. (2001). Constraints in 3D gravity inversion. *Geophysical Prospecting*, 49, 265–280.
- Buchanan, J. L. & Turner, P. R. (1992). *Numerical Methods and Analysis*, chapitre 8.6. McGraw-Hill : New York.
- Burden, R. L. & Faires, J. D. (1993). *Numerical Analysis*. Boston : PWS Publishing Company.
- Chouteau, M. (2001). *Géophysique appliquée II :GLQ 3202*. École Polytechnique. Notes de cours. http://www.cours.polymtl.ca/glq3202/Electrique_glq3202.pdf.
- Courtier, P. & Talagrand, O. (1990). Variational assimilation of meteorological observations with the direct and adjoint shallow-water equations. *Tellus*, 42A, 531–549.
- Daley, R. (1991). *Atmospheric Data Analysis*. Cambridge atmospheric and space science series. Cambridge : Cambridge University Press.
- Daniels, R. W. (1978). *An Introduction to Numerical Methods and Optimization Techniques*. New York : North-Holland.
- Egbert, G. (2002). Electromagnetic inversion : a data assimilation perspective. EM5 : Modeling and Inversion, 16th EM Induction Workshop, Santa Fe, June 16–22, 2002.
- Ehrendorfer, M. (1992). Four-dimensional data assimilation : comparison of variational and sequential algorithms. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 118, 673–713.
- Kalnay, E., Ki Park, S., Pu, Z.-X., & Gao, J. (2000). Application of the quasi-inverse method to data assimilation. *Monthly Weather Review*, 128(3), 864–875.
- Le Dimet, F.-X. & Talagrand, O. (1986). Variational algorithms for analysis and assimilation of meteorological observations : theoretical aspects. *Tellus*, 38A, 97–110.
- Lions, J. L. (1968). *Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles*. Paris : Dunod.
- Oldenburg, D., Li, Y., & Jones, F. (1998). *Tutorial on the UBC-GIF general inversion methodology*. The UBC Geophysical Inversion Facility. <http://www.geop.ubc.ca/ubcgif/tutorials/invtutorial/index.html>.

- Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., & Flannery, B. P. (1992). *Numerical Recipes in FORTRAN : The Art of Scientific Computing*. New York : Cambridge University Press.
- Sanders, B. F. & Katopodes, N. D. (1999). Control of canal flow by adjoint sensitivity method. *Journal of irrigation and drainage engineering*, 125(5), 287–297.
- Schröter, J., Seiler, U., & Wenzel, M. (1993). Variational assimilation of GEOSAT data into an eddy-resolving model of the Gulf Stream extension area. *Journal of Physical Oceanography*, 23(5), 925–953.
- Talagrand, O. (1997). Assimilation of observations, an introduction. Dans M. Ghil, K. Ide, A. Bennett, P. Courtier, M. Kimoto, M. Nagata, M. Saiki, & N. Sato (Éds.), *Data Assimilation in Meteorology and Oceanography : Theory and Practice* (pp. 191–209). Tokyo : Meteorological Society of Japan.
- Talagrand, O. & Courtier, P. (1987). Variational assimilation of meteorological observations with the adjoint vorticity equation. I : Theory. *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, 113, 1311–1328.