

Modèles d'éruption solaire et assimilation de données

Eric Bélanger
Département de physique, Université de Montréal

11 mai 2004

Résumé

Il existe une hiérarchie de modèles de prévision d'éruptions solaires allant de modèles très simples basés sur une analogie avec des processus de diffusion et formulés de manière discrète ou continue jusqu'aux modèles magnétohydrodynamiques compressibles. Depuis quelques années, on a pu récolter assez de données pour être en mesure de tester la validité de ces modèles. Le choix d'une technique d'assimilation de données est étroitement lié à la physique du problème. Le but de ce travail est de discuter et peut-être de proposer un modèle adapté à la théorie et aux observations. Comme la Terre et le Soleil sont fortement couplés, beaucoup d'efforts ont été faits afin de mieux comprendre les processus impliqués d'où la mise en orbite de satellites d'observation. Comme nous nous intéressons aux éruptions solaires, nous allons considérer le modèle de reconnexion magnétique introduit par Parker. Nous allons passer en revue les méthodes utilisées dans la modélisation des éruptions : soit la magnétohydrodynamique et l'auto-organisation critique. Ensuite, plusieurs techniques d'assimilation de données seront présentées. L'assimilation de données permettra l'utilisation simultanée des observations et des modèles théoriques afin de discerner les différentes propriétés (linéaires, non-linéaires, diffusives) des éruptions solaires.

Table des matières

1	Introduction	1
2	Les observations satellites	4
2.1	Le satellite TRACE	4
2.2	Le satellite SOHO	4
3	Théorie des éruptions solaires	9
3.1	Le modèle de reconnexion magnétique	9
3.2	Lois de puissance	10
4	Modèles d'éruption solaire	13
4.1	La magnétohydrodynamique	13
4.2	L'auto-organisation critique	17
5	Les méthodes d'assimilation de données	22
5.1	Les méthodes de corrections successives	23
5.2	Une méthode séquentielle : le filtre de Kalman	23
5.3	Les méthodes variationnelles	25
5.3.1	La méthode variationnelle quadridimensionnelle	26
5.3.1.1	La fonction coût	27
5.3.1.2	Les équations adjointes	28
5.3.1.3	Algorithme pour l'assimilation de données 4D- VAR	33
5.3.2	La méthode quasi-inverse	33
6	Discussion : Ce que je prévois faire pour ma thèse	37
A	Le gain de Kalman et la covariance de l'erreur assimilée	iii
B	Algorithme de minimisation	v

Table des figures

1.1	La connexion Terre-Soleil.	2
2.1	Tubes de flux vus par le satellite TRACE.	5
2.2	Éjection de masse coronale vue par le coronographe LASCO du satellite SOHO.	6
2.3	Éruption solaire du 28 octobre, 2003.	8
3.1	Entrecroisement des tubes de flux (Parker, 1983a).	10
3.2	Reconnexion entre deux boucles magnétiques (Hughes et al., 2003).	11
4.1	Auto-organisation critique d'un tas de sable.	17
4.2	Réseau de sites métastables (Charbonneau et al., 2001).	19
5.1	Application de la méthode de Cressman à un modèle à une dimension (Bouttier & Courtier, 1999).	24
5.2	La méthode variationnelle et son principe (Errico, 1997).	27
5.3	Algorithme général de la méthode 4D-VAR.	34
B.1	Schéma de la fonction coût.	vi

Chapitre 1

Introduction

Le phénomène des éruptions solaires est connu depuis fort longtemps. En effet, il a été observé pour la première fois à Cambridge en 1705 par Stephen Gray qui rapporta avoir vu un “éclair” près d’une tache solaire (Hoyt & Schatten, 1997). Plus récemment, le sujet des éruptions solaires fait l’objet d’études puisqu’il existe un couplage du Soleil avec la Terre : c’est la connexion Terre-Soleil. Outre l’émission de photons, un flux de particules, comprenant entre autre des électrons et des protons, s’échappe continuellement du Soleil formant ainsi un vent solaire. Ce vent solaire se propage dans l’espace et entre en contact avec le champ magnétique de la Terre. Un état d’équilibre se crée entre la tension magnétique de la magnétosphère terrestre et la pression exercée par le vent solaire tel qu’illustré à la figure (1.1) où l’arc violet représente le front de choc entre le vent solaire (lignes blanches) et la magnétosphère (lignes bleues). La magnétosphère est alors compressée du côté du Soleil et prend une forme allongée du côté opposé. Une éruption solaire peut causer une éjection de masse coronale qui perturbera l’équilibre entre le vent solaire et la magnétosphère, généralement on aura : $\frac{d\vec{B}}{dt} \neq 0$. Cela implique l’induction d’un champ électrique d’après les équations de Maxwell, soit la loi de Faraday, $\frac{d\vec{B}}{dt} = -\vec{\nabla} \times \vec{E}$. Le champ électrique va produire des courants dans l’ionosphère ainsi que dans le sol. Ce phénomène est un orage géomagnétique. Il est caractérisé par une augmentation des aurores dans les zones polaires puisque celles-ci sont produites par les photons émis par l’oxygène et l’azote présents dans la haute atmosphère après avoir subi une collision avec un électron (Lang, 2001). Les courants électriques qui circulent dans le sol se propagent dans les structures conductrices provoquant ainsi le déclenchement des transformateurs des réseaux électriques et la corrosion des pipelines de gaz

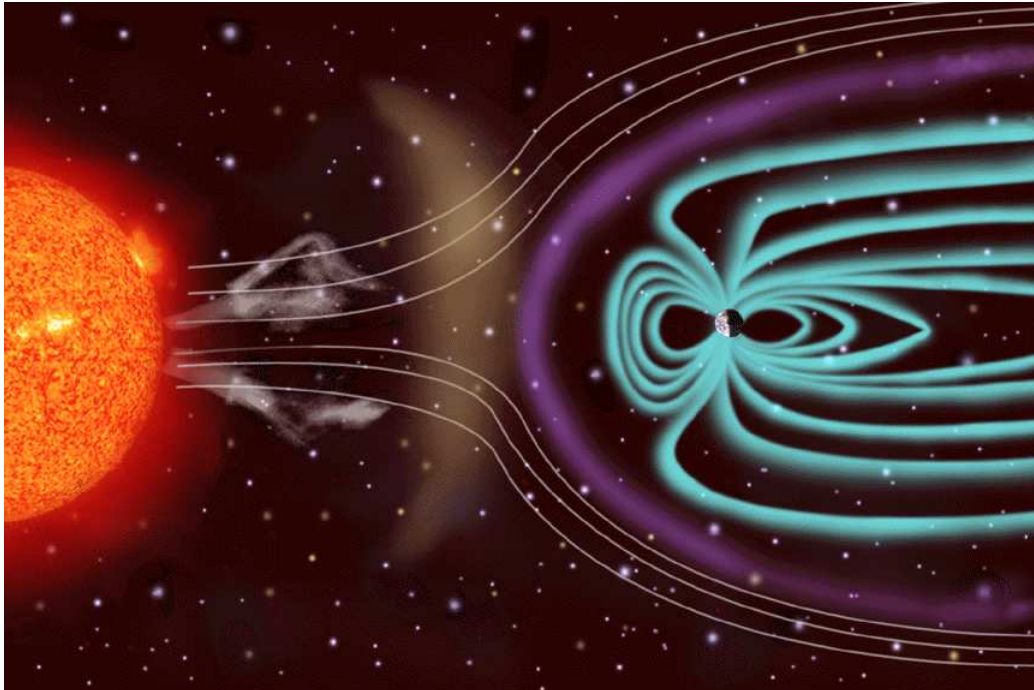


FIG. 1.1 – La connexion Terre-Soleil. Courtoisie du consortium SOHO. SOHO est un projet de coopération international entre l'ESA et la NASA.

naturel et de pétrole. Les télécommunications utilisant les ondes électromagnétiques peuvent également être perturbées (Bolduc et al., 2003). La recherche en ce qui a trait aux prévisions solaires se fait dans trois domaines : le mécanisme des éruptions solaires, la corrélation entre les observations et leurs effets sur la Terre et la mise au point d'un modèle pour l'environnement solaire-terrestre (Fox, 2001). Enfin, on soupçonne les éruptions solaires d'être un des processus responsable du chauffage de la couronne solaire ; les autres processus considérés sont la dissipation d'ondes d'Alfvén (Browning, 1991) et la turbulence magnétohydrodynamique (MHD) (Aschwanden et al., 2000b).

Chapitre 2

Les observations satellites

2.1 Le satellite TRACE

Les observations du Soleil peuvent provenir de plusieurs sources. Le satellite TRACE (*Transition Region and Coronal Explorer*) étudie la relation entre le champ magnétique solaire et la formation de structures de plasma en observant la photosphère, la zone de transition et la couronne solaire (TRACE, 2003). La figure 2.1 montre les tubes de flux formés du plasma emprisonné dans les boucles du champ magnétique solaire. Seul les tubes contenant du plasma récemment surchauffé au point d'émettre dans l'EUV sont visibles sur cette image. Il peut fort bien y avoir des boucles de champ magnétique dans des régions où on ne voit rien.

2.2 Le satellite SOHO

Le satellite SOHO (*Solar & Heliospheric Observatory*), situé à 1,5 millions de kilomètres de la Terre sur une orbite près du point lagrangien L1, contient une douzaine d'instruments d'observation (SOHO, 2003). Le LASCO (*Large Angle and Spectrometric Coronagraph*) est un ensemble de trois coronographes, à bord de SOHO, qui permettent de prendre des images de la couronne solaire pour des tailles allant de 1,1 à 32 rayons solaires (LASCO, 2003). Un coronographe est un télescope spécial où un disque opaque est placé devant la photosphère. Ce procédé ingénieux rend possible l'examen, en lumière visible, de la couronne solaire malgré la photosphère beaucoup plus lumineuse (LASCO, 2003). La figure 2.2, prise par le coronographe LASCO, montre l'évolution temporelle de l'éruption

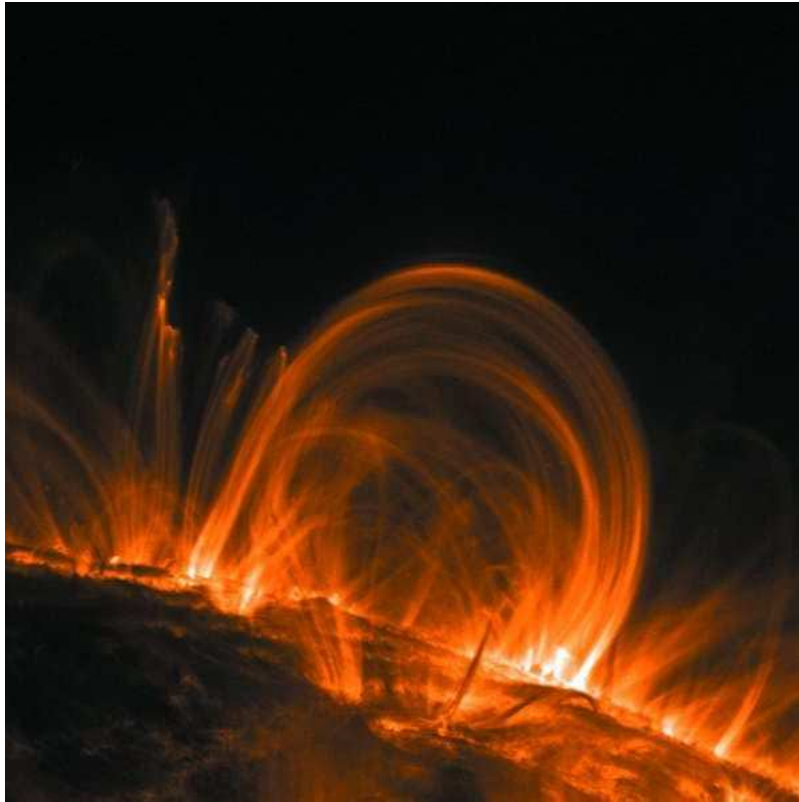


FIG. 2.1 – Tubes de flux vus par le satellite TRACE. <http://www.gsfc.nasa.gov/gsfsc/spacesci/sunearth/tracecl.htm>

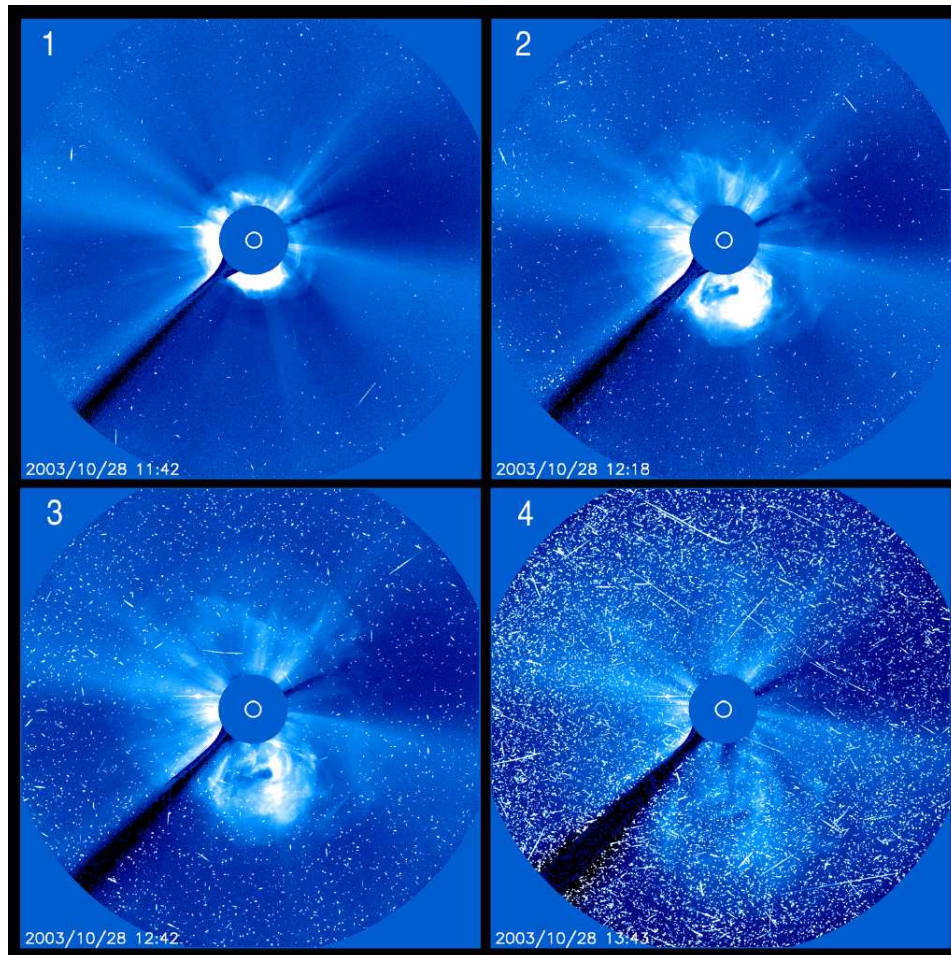


FIG. 2.2 – Éjection de masse coronale vue par le coronographe LASCO du satellite SOHO. Courtoisie du consortium SOHO/LASCO C3. SOHO est un projet de coopération international entre l'ESA et la NASA.

majeure du 28 octobre, 2003. Le cercle blanc central représente le bord de la photosphère. La masse blanche qui se détache du Soleil est le plasma éjecté par l'éruption solaire. La présence de "neige" dans la dernière photo de la séquence est causée par le flux d'électrons et de protons qui frappe le satellite en plein fouet et perturbe ainsi ses circuits électroniques. L'éjection de masse coronale atteint la Terre quelques jours plus tard. Le coronographe LASCO est également utilisé conjointement avec le EIT (*Extreme Ultraviolet Imaging Telescope*) (EIT, 2003). Le EIT prend des images en ultraviolet extrême (EUV) de la région de transition et de la couronne interne. Les bandes passantes utilisées sont données par certaines transitions dans les ions suivants :

- Fe IX/X (171 Å)
- Fe XII (195 Å)
- Fe XV (284 Å)
- He II (304 Å)

Selon l'équation de Saha, les populations des différents niveaux d'ionisation dépendent de la température. Un changement de la bande passante permet donc d'examiner des régions de diverses températures. Le EIT peut ainsi servir dans l'étude de plusieurs structures solaires comme les régions actives, les filaments et protubérances, les trous coronaux, les points brillants coronaux et les plumes polaires. Une photo (Fig. 2.3) prise par le EIT avec l'émission provenant du Fe XII (195 Å) de l'éruption du 28 octobre, 2003 montre l'ampleur de cette éruption ($\sim 0.1R_{\odot}$). Les deux traits horizontaux sur la figure (Fig. 2.3) sont un effet de saturation des détecteurs causé par la trop grande intensité.

Ces observations, prises à haute résolution spatiale et temporelle, doivent d'abord être corrigées afin d'extraire les erreurs dues aux effets instrumentaux et non-solaires comme des pixels inefficaces ou trop brillants, les variations de température orbitale, les pics dus aux rayons cosmiques, la rotation solaire, la dérive du satellite et les données bruitées (Aschwanden et al., 2000a). Des recherches en cours se portent sur l'élaboration d'un algorithme permettant de détecter automatiquement les événements d'éruptions solaires parmi les observations recueillies. Ces données peuvent être fusionnées avec celles du satellite TRACE. De plus, les données de ces satellites sont disponibles sur le Web.

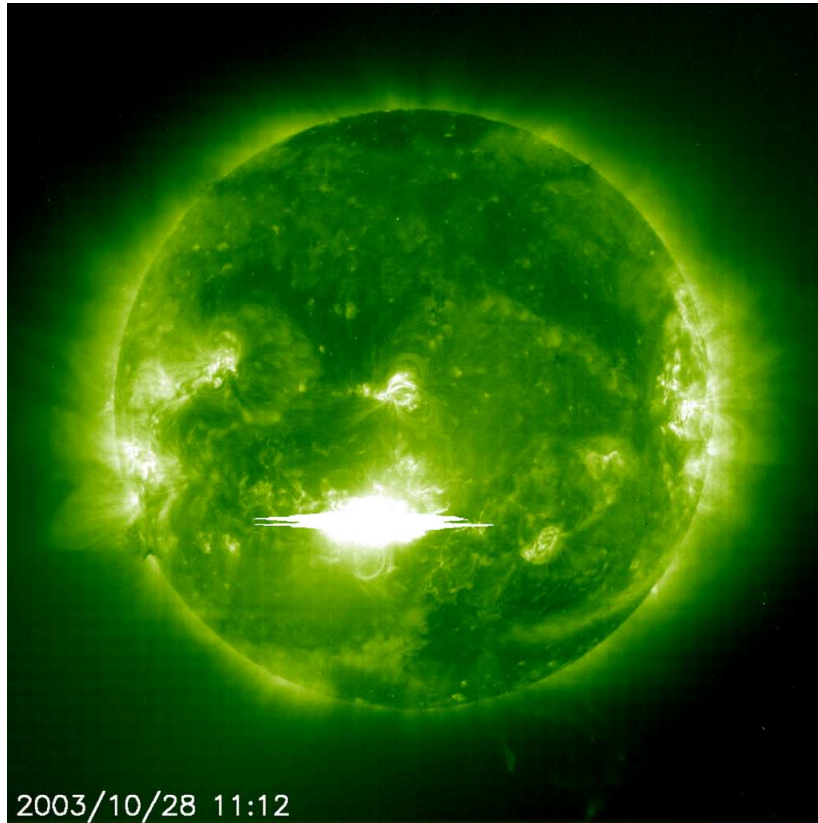


FIG. 2.3 – Éruption solaire du 28 octobre, 2003. Courtoisie du consortium SOHO/EIT. SOHO est un projet de coopération international entre l'ESA et la NASA.

Chapitre 3

Théorie des éruptions solaires

3.1 Le modèle de reconnexion magnétique

Les tubes de flux sont des filaments, formés de gaz chaud et dense, isolés par leurs champs magnétiques (Parker, 1983b). Une telle structure dépliée est montrée à la figure 3.1(a). Les points d’ancrage des tubes de flux sont entraînés dans les mouvements convectifs et aléatoires des granules et des supergranules situées à la surface de la photosphère puisque la pression gazeuse est plus grande que la pression magnétique, $nk_B T \gg B^2/8\pi$ (Parker, 1983a; Lu et al., 1993). Les tubes de flux peuvent être tordus par les tourbillons des granules (Fig. 3.1(b)). Lors des déplacements des granules, les tubes de flux deviennent entremêlés, créant ainsi des discontinuités tangentielles aux points où les tubes de flux orientés dans des directions opposées se rapprochent (Fig. 3.1(c)). Ces endroits sont des points neutres magnétiques puisque le champ magnétique y est nul. Il y apparaît la formation de feuilles de courant ($\vec{J} = \vec{\nabla} \times \vec{B}$) qui s’intensifient avec des entrelacements de plus en plus serrés. Lorsqu’un certain seuil d’instabilité est atteint, les champs magnétiques contraires s’annihilent pour réorganiser leurs topologies ; c’est une reconnexion magnétique. Les feuilles de courant sont ainsi dissipées dans la couronne solaire (Parker, 1988). La figure 3.2 montre le déroulement d’une reconnexion entre deux boucles magnétiques, f et g. Le champ magnétique émerge de la photosphère par les points d’ancrage positifs et y retourne par les points d’ancrage négatifs. Lors du déplacement de la boucle f (image du haut), les deux boucles se croisent et une discontinuité se forme. Il y a une reconnexion, c’est-à-dire les boucles changent leurs configurations en échangeant leurs points d’ancrage négatifs (image du centre). Le résultat de la reconnexion est alors une nouvelle

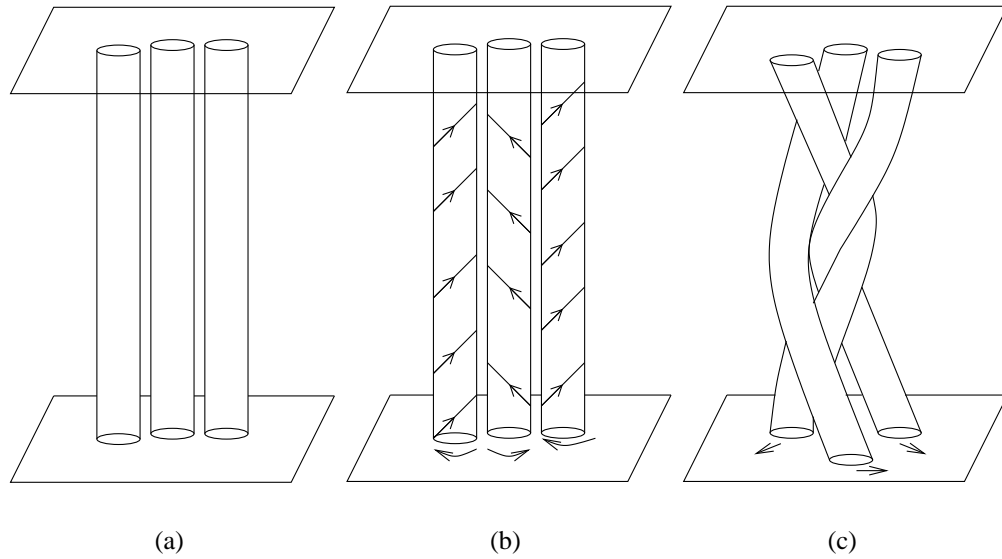


FIG. 3.1 – Entrecroisement des tubes de flux (Parker, 1983a).

configuration des boucles (image du bas) (Hughes et al., 2003). Ces reconnections magnétiques qui libèrent de l'énergie sous forme de rayonnement (rayons X et UV) et de particules accélérées ont été nommées nanoéruptions par Parker (Parker, 1988). Les éruptions solaires de toutes tailles sont donc formées par un grand nombre de ces nanoéruptions.

3.2 Lois de puissance

Plusieurs aspects observés des éruptions solaires se comportent en loi de puissance. On peut penser au maximum de la distribution du flux de rayons X (Lu et al., 1993; Dennis, 1985), à l'énergie relâchée (Charbonneau et al., 2001) et au temps d'attente entre les éruptions (Boffetta et al., 1999; Wheatland, 2000; Norman et al., 2001).

Soit $f(E)dE$ la fraction des éruptions relâchant une quantité d'énergie entre E et $E + dE$, la distribution statistique $f(E)$ s'écrit :

$$f(E) = f_0 E^{-\alpha} \quad (3.1)$$

où $\alpha > 0$. Cette loi de puissance a été observée sur plus de huit décades en énergie (Aschwanden et al., 2000b). L'énergie totale dégagée par un groupe d'éruption

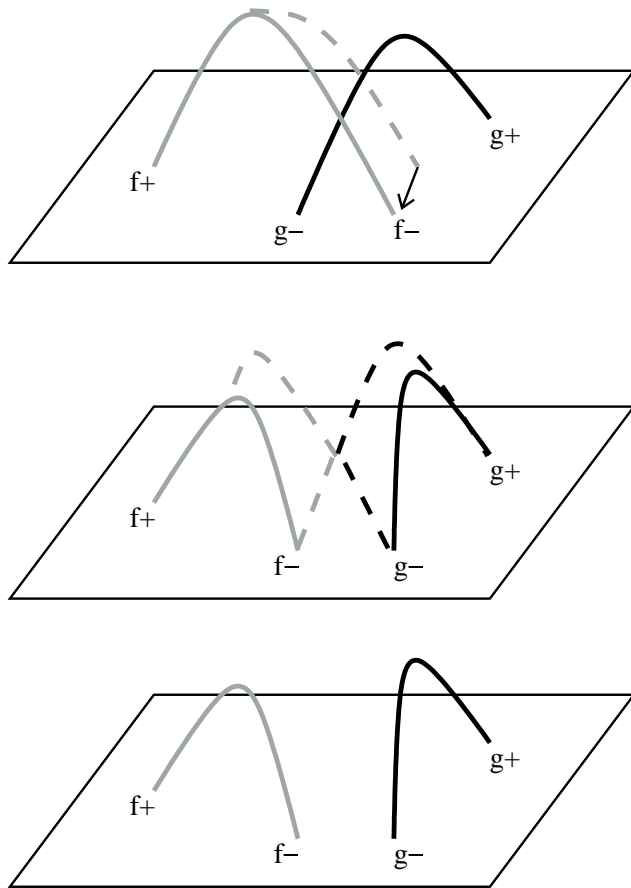


FIG. 3.2 – Reconnexion entre deux boucles magnétiques (Hughes et al., 2003).

tions peut être calculée :

$$\begin{aligned}
E_{tot} &= \int_{E_{min}}^{E_{max}} f(E) E dE \\
&= f_0 \left(\frac{E^{2-\alpha}}{2-\alpha} \right) \Bigg|_{E_{min}}^{E_{max}}, \quad \alpha \neq 2
\end{aligned} \tag{3.2}$$

La valeur de l'exposant α permettra de connaître la taille des éruptions qui dominent la libération d'énergie. Si $\alpha > 2$, les petites éruptions dominent alors que les grandes éruptions domineront si $\alpha < 2$ (Charbonneau et al., 2001). La détermination d' α demeure une procédure délicate puisqu'on doit calculer l'énergie volumétrique à partir des flux des rayons X et UV observés.

À l'aide de la mesure d'émission (EM), qui est proportionnelle au flux de photons détectés, la densité électronique (n_e) est ainsi déterminée :

$$EM = \int n_e^2(z) dz \tag{3.3}$$

où l'intégrale est faite sur l'épaisseur de la boucle magnétique. Si on suppose, par exemple, une densité électronique constante et une boucle de diamètre d , la densité électronique devient :

$$n_e = \sqrt{\frac{EM}{d}}. \tag{3.4}$$

L'énergie thermique totale est alors obtenue en intégrant sur le volume de la région émettrice, V , :

$$E_{th} = 3n_e k_B T_e V \tag{3.5}$$

où k_B est la constante de Boltzmann et T_e est la température électronique (Aschwanden et al., 2000b). Le problème majeur s'avère la détermination de ce volume sans connaître exactement la forme géométrique de la région en éruption (Charbonneau et al., 2001). D'après une étude récente effectuée à l'aide d'un modèle d'avalanche, il semblerait même que les éruptions solaires soient un objet fractal (McIntosh & Charbonneau, 2001).

Chapitre 4

Modèles d'éruption solaire

4.1 La magnétohydrodynamique

Comme la couronne solaire est constituée d'un plasma situé dans un fort champ magnétique, il est naturel d'utiliser les équations de la magnétohydrodynamique (MHD) sous forme compressible en 3D pour décrire le phénomène des éruptions solaires. Cependant, certaines conditions doivent être remplies. Pour être décrit comme un continu, le système doit avoir un libre parcours moyen plus petit que la dimension physique du domaine, i.e. $N_D \gg 1$ où le nombre de Debye, N_D , est le nombre de particules présentes dans une sphère de Debye : $N_D = n \frac{4}{3} \pi \lambda_D^3$. La longueur de Debye qui est la distance à laquelle deux particules chargées interagissent est donnée par $\lambda_D = \sqrt{k_B T / 4\pi n e^2}$ où n est le nombre de particules. Les collisions doivent également être dominantes pour que les forces électromagnétiques soient plus importantes que les forces hydrodynamiques sinon le gaz agira comme un gaz ordinaire et non comme un plasma. Autrement dit, nous voulons $\omega_p \bar{\tau} > 1$ où $\omega_p = \sqrt{4\pi n e^2 / m_e}$ est la fréquence de plasma et $\bar{\tau}$ est le temps moyen entre les collisions (Chen, 1974). De plus, le fluide doit être électriquement neutre donc la longueur de Debye λ_D doit être petite comparativement aux dimensions du domaine et la fréquence de plasma ω_p doit être plus petite que les fréquences macroscopiques (Valdettaro, 1992; Chen, 1974). Enfin, le champ magnétique doit être suffisamment faible pour que le rayon de Larmor, $r_L = \sqrt{k_B T m_e c} / eB$, soit plus grand que le libre parcours moyen (Valdettaro, 1992). Les équations MHD sont :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \rho \vec{v} \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v} \vec{v} + \underline{\underline{\tau}}) - \vec{\nabla} P + \vec{J} \times \vec{B} \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot (e \vec{v}) - P \vec{\nabla} \cdot \vec{v} + Q_{\text{Joule}} + Q_{\text{visc}} \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \times \vec{E} \quad (4.4)$$

$$\vec{E} = -(\vec{v} \times \vec{B}) + \eta(\vec{r}) \vec{J} \quad (4.5)$$

$$\vec{J} = \vec{\nabla} \times \vec{B} \quad (4.6)$$

où $\rho, \vec{v}, e, \vec{B}, \vec{E}, \eta, \vec{J}, \underline{\underline{\tau}}, P = e/(\gamma - 1), Q_{\text{visc}}, Q_{\text{Joule}}$ sont la densité, la vitesse, l'énergie thermique, le champ magnétique, le champ électrique, la résistivité magnétique, le courant électrique, le tenseur des contraintes visqueuses, la pression gazeuse, la dissipation visqueuse et la dissipation de Joule, respectivement (Galsgaard & Nordlund, 1996). γ est le rapport des chaleurs spécifiques ($\gamma = 5/3$ pour un gaz idéal). Comme il n'y a pas de solution analytique aux équations MHD, elles sont résolues numériquement.

Dans les plasmas, il existe des ondes qui propagent les perturbations des lignes de champ magnétique. Afin de traiter ces ondes, on considère des équations MHD simplifiés sans dissipation (Cowling, 1976; Tanenbaum, 1967) :

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{B}) \quad (4.7)$$

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\vec{\nabla} P + \frac{1}{\mu} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \times \vec{B}. \quad (4.8)$$

Si les perturbations sont petites, le plasma se comportera comme un gaz ordinaire. Le gradient de pression est relié au gradient de densité par :

$$\vec{\nabla} P = v_s^2 \vec{\nabla} \rho \quad (4.9)$$

où $v_s = \sqrt{\gamma P / \rho}$ est la vitesse adiabatique du son dans le fluide (Tanenbaum, 1967). De plus, on considère que le champ magnétique est donné par $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{b}$ où \vec{B}_0 est un champ uniforme dans la direction z . Les équations MHD obtenues sont :

$$\frac{\partial \vec{b}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{B}_0) = B_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} - \vec{B}_0 (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \quad (4.10)$$

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -v_s^2 \vec{\nabla} \rho + \frac{1}{\mu} \left(\vec{B}_0 \frac{\partial \vec{b}}{\partial z} - \vec{\nabla} (\vec{B}_0 \cdot \vec{b}) \right) \quad (4.11)$$

En dérivant Éq. (4.11) par rapport au temps, on se retrouve avec :

$$\frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} = v_s^2 \nabla^2 \vec{v} + v_A^2 \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial z} - \hat{z} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \right) - \vec{\nabla} \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} - (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \right) \right] \quad (4.12)$$

où la conservation de la masse (Éq. (4.1)) a été utilisée, $v_A^2 = B_0^2 / \mu \rho$ et \hat{z} est le vecteur unitaire dans la direction z (Cowling, 1976).

Nous devons considérer deux cas : incompressible ($\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$) et compressible ($\vec{\nabla} \cdot \vec{v} \neq 0$). Dans le cas incompressible, $v_z = 0$, donc Éq. (4.12) devient :

$$\frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} = v_a^2 \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial z^2} \quad (4.13)$$

qui est l'équation d'une onde ayant une vitesse v_A . C'est une onde d'Alfvén (Cowling, 1976). C'est une onde transversales qui voyage le long des lignes du champ magnétique. Pour illustrer ce propos, on examine l'équation d'onde pour une corde tendue :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho_m} \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} \quad (4.14)$$

où y est le déplacement vertical de la corde, T est la tension et ρ_m est la densité de masse de la corde (Shohet, 1971). L'onde d'Alfvén se propage de la même façon qu'une onde dans une corde ayant une tension $T = B^2 / \mu$. Considérons maintenant le cas compressible. La composante en z d'Éq. (4.12) est :

$$\frac{\partial^2 v_z}{\partial t^2} = v_s^2 \frac{\partial (\vec{\nabla} \cdot \vec{v})}{\partial z} \quad (4.15)$$

et sa divergence est :

$$\frac{\partial^2 (\vec{\nabla} \cdot \vec{v})}{\partial t^2} = v_s^2 \nabla^2 (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) + v_A^2 \nabla^2 \left((\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) - \frac{\partial v_z}{\partial z} \right). \quad (4.16)$$

Après avoir éliminé v_z des Éq. (4.15) et (4.16), on obtient :

$$\frac{\partial^4 (\vec{\nabla} \cdot \vec{v})}{\partial t^4} - (v_A^2 + v_s^2) \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\nabla^2 (\vec{\nabla} \cdot \vec{v})) + v_A^2 v_s^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} (\nabla^2 (\vec{\nabla} \cdot \vec{v})) = 0. \quad (4.17)$$

En supposant une onde plane d'amplitude $\vec{v} = \vec{v}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$ et en substituant dans l'Éq. (4.17) :

$$\frac{\omega^4}{\vec{k}^4} - (v_A^2 + v_s^2) \frac{\omega^2}{\vec{k}^2} + v_A^2 v_s^2 \frac{k_z^2}{\vec{k}^2} = 0. \quad (4.18)$$

La vitesse de phase (ω^2/\vec{k}^2) est :

$$\frac{\omega^2}{\vec{k}^2} = \frac{1}{2} \left((v_A^2 + v_s^2) \pm [(v_A^2 + v_s^2)^2 - 4v_A^2 v_s^2 \cos^2 \theta]^{1/2} \right) \quad (4.19)$$

où $\theta = \cos^{-1} \left(\frac{k_z}{k} \right)$ est l'angle entre la direction de la vitesse de phase (\vec{k}) et \vec{B}_0 (Cowling, 1976; Tanenbaum, 1967). Les deux vitesses de phase possibles sont nommées ondes magnétosonores lente et rapide. Ces ondes sont importantes dans l'interaction entre le vent solaire et la magnétosphère terrestre (Cowling, 1976).

Considérons maintenant les différentes échelles temporelles et spatiales. Le processus des éruptions solaires comporte trois échelles temporelles. Si on pose que le plasma a une résistivité η , les courants électriques engendrés par le mouvement des points d'ancrage vont se dissiper dans un temps résistif caractéristique $\tau_R \equiv a^2/\eta$ où $a \sim 3000$ km est l'échelle du mouvement des points d'ancrage (Longcope & Sudan, 1994). La seconde échelle est le temps de retournement des tourbillons, τ_E , où les points d'ancrage sont déplacés. Finalement, il y a le temps d'Alfvén, $\tau_A \equiv L/v_A$; soit le temps requis à une onde de cisaillement d'Alfvén pour traverser une distance L le long du champ magnétique avec une vitesse d'Alfvén $v_A = B_0/\sqrt{\mu\rho}$. Typiquement, $\tau_A \sim 10^1 s$ et $\tau_E \sim 10^3 \tau_R \sim 10^{12} s$ (Longcope & Sudan, 1994), donc nous avons :

$$\tau_A \ll \tau_E \ll \tau_R. \quad (4.20)$$

Il y a donc une très grande disparité entre les diverses échelles temporelles. Quant aux échelles spatiales, les tubes de flux couvrent l'étendue d'une région active ($L_A \sim 10^9$ cm) tandis que la région où se fait la reconnexion est de l'ordre de $L_R \sim 10^4$ cm :

$$L_R \ll L_A. \quad (4.21)$$

En ce qui a trait aux simulations numériques, une grande disparité des échelles temporelles ou spatiales entraîne une augmentation du temps de calcul puisqu'il faut utiliser de grandes grilles de calcul avec une très grande résolution. Dans le cas des éruptions, cette double disparité demande des ressources informatiques trop exigeantes même avec les superordinateurs actuels. Il faut donc faire un compromis en utilisant des domaines spatiaux et/ou temporels limités (Galsgaard & Nordlund, 1996) ou utiliser une simplification des équations MHD (Mikić et al., 1989; Longcope & Sudan, 1994).

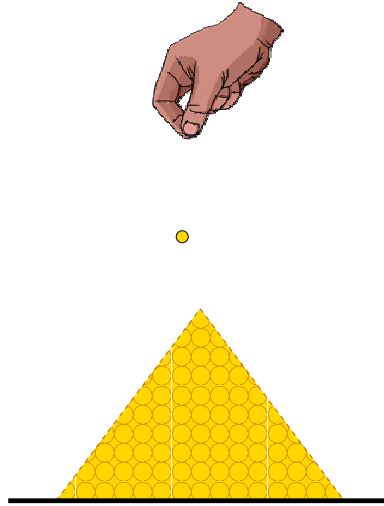


FIG. 4.1 – Auto-organisation critique d’un tas de sable.

4.2 L’auto-organisation critique

On peut également changer notre approche car les nombreuses lois de puissance observées laissent supposer que nous avons possiblement affaire à un phénomène auto-organisé critique (Bak et al., 1987). Ces systèmes critiques sont insensibles aux conditions initiales, ne requièrent aucun paramètre libre et sont un attracteur dynamique (Lu et al., 1993). L’auto-organisation critique peut être intuitivement expliquée en faisant une analogie avec un tas de sable (Fig. 4.1) (Bak et al., 1987). Si on lâche des grains de sable un à la fois sur une table, il se formera un tas de sable de forme conique. Le cône aura un angle critique uniquement déterminé par la nature des grains de sable (composition, dimension des grains, humidité). Cet état est un état critique que le système tentera de maintenir. Si on continue le relâchement de grains de sable, ces derniers vont soit se déposer sur le tas, soit causer une avalanche. Le forçage externe est lent puisqu’on attend que le système se stabilise avant de relâcher le prochain grain de sable. Lorsque le seuil d’instabilité est atteint (i.e. pente trop abrupte), le système devient alors instable. Celui-ci se stabilise par lui-même en effectuant une redistribution locale de la pente qui se manifeste sous la forme d’une avalanche (Charbonneau et al., 2001). Les modèles d’auto-organisation critique sont aussi connus sous le nom de modèles d’avalanche malgré le fait qu’ils sont présents dans des domaines aussi divers que les tremblements de terre, les glissements de terrain, les sous-orages

magnétosphériques, les feux de forêts, etc (Charbonneau et al., 2001).

Le modèle d'avalanche peut être appliqué aux éruptions solaires. Le tas de sable est remplacé par un réseau de sites métastables (Fig. 4.2) où une quantité scalaire $A_{i,j}^n$ (n est l'indice de temps), habituellement reliée au champ magnétique, est définie. Le champ moyen du réseau est alors :

$$\langle A \rangle = \frac{1}{ND} \sum_{i,j} A_{i,j}^n \quad (4.22)$$

et l'énergie du réseau est :

$$E = \sum_{i,j} (A_{i,j}^n)^2 \quad (4.23)$$

où N est la taille du réseau et D est sa dimension ($D = 2$) (Charbonneau et al., 2001). Le critère de stabilité, basé sur la *courbure* du champ, est défini comme étant $|\Delta A_{i,j}^n| > A_c$ où :

$$\Delta A_{i,j}^n \equiv A_{i,j}^n - \frac{1}{2D} \sum_{\text{voisins}} A_{\text{voisins}}^n \quad (4.24)$$

et A_c est une valeur critique dont la valeur précise n'aura pas de répercussion sur le modèle en autant qu'elle soit non nulle. Si, à la suite d'une perturbation, un site ne respecte pas le critère de stabilité, il y aura une redistribution de A aux sites voisins comme suit :

$$A_{i,j}^{n+1} = A_{i,j}^n - \frac{2D}{2D+1} \Delta A_{i,j}^n \quad (4.25)$$

et

$$A_{i\pm 1, j\pm 1}^{n+1} = A_{i\pm 1, j\pm 1}^n + \frac{1}{2D+1} \Delta A_{i,j}^n. \quad (4.26)$$

Si certains de ces sites voisins deviennent instables, il y aura d'autres redistributions jusqu'à ce que le système se stabilise. Le surplus d'énergie magnétique sera donc diffusé à travers tout le système (Liu et al., 2002; Charbonneau et al., 2001). Comme les règles régissant le seuil d'instabilité et la redistribution d'énergie sont basés sur une grille discrète, il est possible de les écrire sous forme continue après une légère modification de la redistribution de la quantité A pour des raisons de stabilité numérique (Liu et al., 2002). Le mécanisme d'avalanche présent dans la couronne solaire peut donc être décrit par :

$$\frac{\partial A}{\partial t} = -\nu \frac{\partial^4 A}{\partial x^4} - \lambda \frac{\partial^2 A_{xx}^3}{\partial x^2} + F_R \quad (4.27)$$

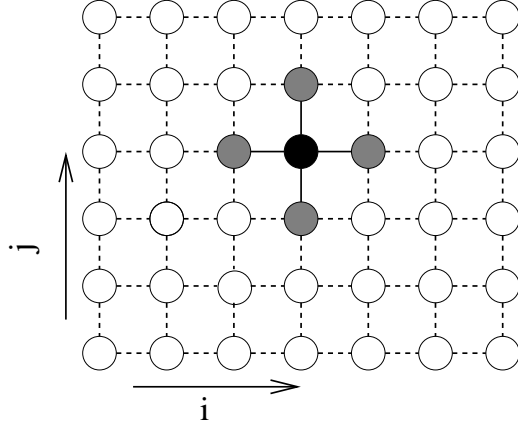


FIG. 4.2 – Réseau de sites métastables (Charbonneau et al., 2001).

où A est la quantité physique redistribuée, ν est le coefficient d’hyperdiffusion, λ est le coefficient de couplage non-linéaire et F_R est la force perturbatrice aléatoire (Liu et al., 2002). Le terme d’hyperdiffusion peut être réécrit comme étant la diffusion de la “courbure” (A_{xx}) du champs A : $\frac{\partial^2 A_{xx}}{\partial x^2}$. En utilisant l’analogie avec le tas de sable, cette courbure peut être interprétée comme la pente locale. Quant au terme de couplage non-linéaire, il apparaît lorsqu’on considère que la redistribution se fait seulement à la frontière de la région stable et de la région d’avalanche. Cette redistribution variable rend le système numériquement stable (Liu et al., 2002). La quantité A ne peut être le champ magnétique puisque cela impliquerait $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} \neq 0$. Néanmoins, A peut être représenté comme un potentiel vecteur ($\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$) mais Éq. (4.23) n’est plus une mesure évidente de l’énergie. Une incrémentation de A est alors interprétée comme une torsion locale du champ magnétique (Charbonneau et al., 2001). Si on fait abstraction de la divergence du champ magnétique, le modèle d’avalanche peut être relié à la magnétohydrodynamique par l’entremise de l’équation de l’induction magnétique :

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{B}) + \eta \nabla^2 \vec{B}. \quad (4.28)$$

Considérons un régime à forte turbulence MHD où \vec{B} est donné par un champ moyen avec des fluctuations perpendiculaires, i.e. $\frac{\partial}{\partial z} = 0$. En posant que la force de Lorentz est en équilibre dans l’équation du moment, le champ des vitesses est (Liu et al., 2002) :

$$\vec{v} \sim \tau_c \hat{j} \times \vec{B} \quad (4.29)$$

où τ_c est un temps caractéristique de l'évolution de la vitesse. L'induction magnétique devient :

$$\frac{\partial B}{\partial t} \sim B^2 \frac{\partial^2 B}{\partial^2 x} + \frac{\partial B}{\partial x} \frac{\partial B^2}{\partial x} + \eta \frac{\partial^2 B}{\partial^2 x} \quad (4.30)$$

$$\sim (B^2 + \eta) \frac{\partial^2 B}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 B^3}{\partial^2 x} \quad (4.31)$$

Afin de faciliter la comparaison de l'Éq. (4.30) au modèle d'avalanche (Éq. (4.27)), nous allons réécrire cette dernière en prenant la dérivée seconde des deux côtés et en laissant tomber le terme de forçage aléatoire :

$$\frac{\partial B}{\partial t} = -\nu \frac{\partial^4 B}{\partial x^4} - \lambda \frac{\partial^4 B^3}{\partial x^4} \quad (4.32)$$

où $B \equiv A_{xx}$ (Liu et al., 2002). Comparativement à l'Éq. (4.32), le premier terme à droite de l'Éq. (4.30) ne correspond pas au terme d'hyperdiffusion. Le terme de diffusion $\eta \frac{\partial^2 B}{\partial^2 x}$ est modifié par une diffusivité de tourbillon η_{turb} puisque le grand nombre de Reynolds magnétique ($R_m = vL/\mu$ où L est une longueur caractéristique (Tanenbaum, 1967)) et la reconnexion magnétique de la couronne solaire génèrent de la turbulence. Le nombre de Reynolds magnétique est défini comme le rapport du terme de transport ($\vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{B})$) sur le terme de diffusion ($\eta \nabla^2 \vec{B}$) (Tanenbaum, 1967). Seul la vitesse moyennée sur les petites échelles, $\eta_{\text{turb}} \sim \langle v^2 \rangle$, contribue à la dissipation du champ magnétique aux grandes échelles. La prédominance des petites échelles nous mène à (Liu et al., 2002) :

$$\frac{\partial B}{\partial t} \sim \eta_{\text{turb}} \frac{\partial^2 B}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 B^3}{\partial^2 x}. \quad (4.33)$$

Le premier terme d'Éq. (4.33) est une diffusion comparativement au terme d'hyperdiffusion d'Éq. (4.32) mais dans l'espace de Fourier, $\eta_{\text{turb}} \sim k^2$, alors le laplacien d'Éq. (4.33) devient une hyperdiffusion. Il y existe donc un lien, dans l'espace de Fourier, entre le modèle d'avalanche (Éq. 4.32) et les équation de la MHD. Trois conclusions s'offrent à nous (Liu et al., 2002) :

1. La dynamique de la reconnexion est dominée par le champ magnétique.
2. Après la reconnexion, une forte turbulence MHD apparaît et celle-ci domine le transport dans et hors de la région de la reconnexion.
3. Une fois la reconnexion déclenchée, l'hyperdiffusivité est efficace dans la dissipation du champ magnétique malgré le nombre de Reynolds magnétique élevé.

Comme ces modèles auto-organisés critiques reproduisent remarquablement bien la dynamique à grande échelle et les propriétés statistiques des éruptions solaires (Lu et al., 1993; Charbonneau et al., 2001; Norman et al., 2001) tout en restant assez simples, ce sont eux que nous avons choisis pour notre étude.

Chapitre 5

Les méthodes d'assimilation de données

Jusqu'à présent, nous avons considéré l'utilisation des observations satellites et des modèles théoriques et numériques pour tenter de comprendre le phénomène complexe des éruptions solaires pour être ensuite capable de pouvoir les prévoir. Un moyen efficace pour jumeler les observations avec les modèles numériques consiste à utiliser les techniques d'assimilation de données qui permettent d'incorporer les observations dans les modèles numériques (Courtier & Talagrand, 1990; Talagrand & Courtier, 1987). Les champs produits par l'assimilation de données doivent correspondre aux observations tout en obéissant aux lois physiques connues et/ou à des relations statistiques (Le Dimet & Talagrand, 1986).

Les méthodes d'assimilation de données existent en trois catégories principales. Elles sont, en ordre croissant de complexité : les méthodes de corrections successives, les méthodes séquentielles (filtre de Kalman) et les méthodes variationnelles (Kalnay, 2003; Daley, 1991; Le Dimet & Talagrand, 1986). Ces méthodes peuvent toutefois comporter plusieurs variantes (Lagarde, 2000). Ces diverses méthodes peuvent toutes s'avérer utiles ; il suffit de choisir celle qui répondra le mieux au problème physique que l'on veut résoudre et des ressources numériques à notre disposition (Lorenç, 1986). Ces méthodes partagent assez de similarités (Le Dimet & Talagrand, 1986) pour que l'on tente de mettre au point une notation commune afin de mieux voir leurs liens (Ide et al., 1997). Enfin, nous pouvons trouver une liste exhaustive d'articles publiés sur les méthodes variationnelles et les filtres de Kalman dans Courtier et al., (1993).

5.1 Les méthodes de corrections successives

Les méthodes de corrections successives, aussi connues sous le nom de méthodes de Cressman, consistent à corriger successivement une ébauche jusqu'à ce qu'elle comprenne les observations recueillies (Cressman, 1959). L'ébauche est obtenue par une prévision précédente ou par un état trivial dû à des contraintes physiques. Sur la figure (5.1), représentant un champ physique comme une pression en fonction de la position, l'ébauche est en pointillé et nous avons trois observations (●). Nous obtenons une analyse, $X_a(j)$, à l'aide de l'équation suivante :

$$X_a(j) = X_b(j) + \frac{\sum_{i=1}^n w(i, j)[Y(i) - X_b(i)]}{\sum_{i=1}^n w(i, j)} \quad (5.1)$$

où $X_b(j)$ est l'ébauche, $Y(i)$ sont les observations ($i = 1 \dots n$) et

$$w(i, j) = \max \left(0, \frac{R^2 - d_{i,j}^2}{R^2 + d_{i,j}^2} \right) \quad (5.2)$$

est un poids statistique qui dépend d'un certain rayon R où l'observation est dite invalide et de la distance $d_{i,j}$ entre l'observation i et le point de grille j (Bouttier & Courtier, 1999). Si nécessaire, nous pouvons soumettre l'analyse à des routines de lissage pour enlever les chocs et les discontinuités qui peuvent apparaître dans la solution (Cressman, 1959). Malgré ses déficiences, notamment au sujet de l'utilisation possible d'observations erronées et de résultats qui n'obéissent pas aux lois physiques, cette méthode simple et économique est encore utilisée de nos jours pour diverses applications (Kalnay, 2003; Bouttier & Courtier, 1999).

5.2 Une méthode séquentielle : le filtre de Kalman

Dans cette section, nous allons considérer le filtre de Kalman pour un système linéaire (Kalman, 1960). Le filtre de Kalman a été développé dans le but de filtrer les signaux électriques (Talagrand, 1997). Il est l'estimateur à moindre carré optimal et est à la base de presque toutes les méthodes séquentielles (Kantha & Clayson, 2000).

Premièrement, nous voulons obtenir une prévision $X_{p,n}$ à partir du modèle physique où X est une variable d'état scalaire et n indique l'itération en temps. À cette fin, un opérateur linéaire L_{n-1} représentant les équations physiques linéarisées est appliqué à la variable X assimilée, $X_{a,n-1}$. La variable assimilée

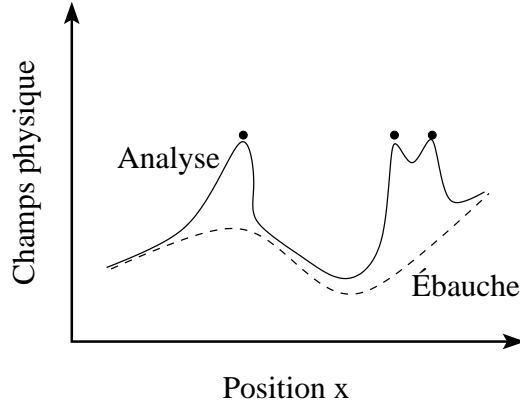


FIG. 5.1 – Application de la méthode de Cressman à un modèle à une dimension (Bouttier & Courtier, 1999).

est la meilleure combinaison de la prévision précédente du modèle $X_{p,n-1}$ et de l'observation $X_{o,n-1}$. Cette prévision est donc donnée par :

$$X_{p,n} = L_{n-1}X_{a,n-1}. \quad (5.3)$$

Soit $X_{v,n}$ la véritable valeur de X donnée par le modèle numérique auquel nous avons ajouté un bruit additif $e_{v,n-1}$, nous avons :

$$X_{v,n} = L_{n-1}X_{v,n-1} + e_{v,n-1}. \quad (5.4)$$

La covariance du bruit $e_{v,n-1}$ s'écrit $Q_{n-1} = \overline{e_{v,n-1}e_{v,n-1}}$ où le surlignement indique une moyenne. L'obtention de la valeur assimilée se fait en minimisant la moyenne du carré de l'erreur d'estimation $e_{a,n} = \overline{(X_{a,n} - X_{v,n})^2}$ où $X_{v,n}$ est la véritable valeur de X . Soit :

$$e_{p,n} = X_{v,n} - X_{p,n} = e_{v,n-1} - L_{n-1}e_{a,n-1} \quad (5.5)$$

l'erreur de la prévision,

$$e_{o,n} = X_{o,n} - X_{v,n} \quad (5.6)$$

l'erreur dans l'observation,

$$P_n = Q_{n-1} + L_{n-1}P_{a,n-1}L_{n-1} \quad (5.7)$$

la covariance de l'erreur de la prévision et

$$R_n = \overline{e_{o,n}e_{o,n}} \quad (5.8)$$

la covariance de l'erreur dans l'observation. Le gain de Kalman peut être calculé (Annexe A) :

$$K_n = P_n(P_n + R_n)^{-1} \quad (5.9)$$

et la covariance de l'erreur assimilée est mise à jour :

$$P_{a,n} = (1 - K_n)P_n. \quad (5.10)$$

Enfin, nous obtenons la valeur assimilée $X_{a,n}$:

$$X_{a,n} = X_{p,n} + K_n(X_{o,n} - X_{p,n}) \quad (5.11)$$

où K_n est le gain de Kalman qui nous donne la meilleure estimation statistique) afin de déterminer la valeur assimilée (Kantha & Clayson, 2000). Les équations tiennent aussi pour un système ayant plusieurs variables d'état.

Malgré le fait qu'il soit l'estimateur à moindre carré optimal, le filtre de Kalman comporte plusieurs lacunes. Il peut donner des résultats qui n'obéissent pas aux équations physiques à moins d'imposer des contraintes spéciales (Kantha & Clayson, 2000). Aussi le filtre de Kalman est seulement valide pour des systèmes linéaires et la statistique des erreurs nécessaire à la réalisation du filtre est généralement mal connue mais aussi très exigeante en ressources informatiques (Kantha & Clayson, 2000).

Afin de pouvoir appliquer le filtre de Kalman à des systèmes non-linéaires, plusieurs variantes ont été mises au point tel le filtre de Kalman étendu où la propagation de l'erreur est basée sur une linéarisation du modèle et le filtre de Kalman d'ensemble basé sur un échantillonnage Monte Carlo (Madsen & Cañizares, 1999; Lagarde, 2000). Dans le but d'éviter le lourd calcul de la covariance P_n , nous pouvons simplifier son calcul à l'aide de plusieurs approches comme l'utilisation de schémas sous-optimaux (Todling & Cohn, 1994). Enfin, l'interpolation optimale consiste à une simplification du filtre de Kalman où la covariance de l'erreur de la prévision, P_n , reste constante (Kantha & Clayson, 2000).

5.3 Les méthodes variationnelles

Les méthodes variationnelles consistent à trouver la trajectoire des variables d'état qui minimise une fonction coût. La fonction coût est une fonction scalaire qui mesure l'écart entre la prévision et les observations. Ceci est un problème avec contraintes puisque cette trajectoire doit satisfaire les équations physiques. Néanmoins, nous pouvons changer ce problème avec contraintes par un problème

sans contraintes si, au lieu de chercher la trajectoire optimale, nous cherchons les conditions initiales qui minimisent la fonction coût. Cette manipulation est possible grâce au fait que chaque trajectoire est entièrement déterminée par les conditions initiales lesquelles peuvent être arbitraires. La procédure de minimisation va toutefois nécessiter le gradient de la fonction coût par rapport aux conditions initiales d'où le développement des équations adjointes (Sec. 5.3.1.2) (Talagrand & Courtier, 1987).

5.3.1 La méthode variationnelle quadridimensionnelle

La figure (5.2) présente un aperçu de la méthode variationnelle quadridimensionnelle (4D-VAR). Nous allons examiner l'évolution de la valeur d'un point de grille comme, par exemple, un champ magnétique à un endroit donné sur un intervalle de temps T . Le point B est une estimation de la condition initiale au temps 0. En utilisant cette condition initiale, on obtient comme prévision le point F au temps T . Comme on peut le constater, ce point se situe bien au-delà de la barre d'erreur de l'observation O . Dans la méthode 4D-VAR, nous utilisons la différence entre la prévision F et l'observation O , pour produire une nouvelle condition initiale B^* . Si on utilise B^* comme point de départ pour notre simulation, nous obtenons la prévision F^* qui se trouve plus près de l'observation. Enfin, pour un temps plus grand que T , B^* donnera de meilleures prévisions que B ou que A , un point intermédiaire situé entre F et F^* (Errico, 1997).

Ce qui est notable est qu'une petite erreur dans les conditions initiales peut s'amplifier énormément au cours du temps. Ceci est une caractéristique des systèmes instables (Lorenz, 1985). Pour un intervalle de temps Δt , une petite perturbation (erreur) initiale $\epsilon(\Delta t)$ croît exponentiellement :

$$\epsilon(\Delta t) \propto e^{\Lambda \Delta t} \quad (5.12)$$

où Λ est un exposant de Lyapunov (Smith et al., 1999; Smith, 2001). En général, les exposants de Lyapunov d'un système stable sont tous plus petits ou égaux à zéro alors qu'un système instable possède au moins un exposant plus grand que zéro (Kalnay, 2003). Toutefois, il faut remarquer que Λ va varier selon le Δt et c'est seulement lorsque $\Delta t \rightarrow \infty$ qu'un Λ positif démontre que le système est instable (Smith et al., 1999; Smith, 2001). Les systèmes stables ont une prévisibilité infinie puisqu'ils sont stationnaires ou bien périodiques tandis que les systèmes instables ont une limite de prévisibilité due à leur non-linéarité (Lorenz, 1963). L'exposant de Lyapunov, comme test de prévisibilité, n'est pas très efficace : d'abord c'est une moyenne qui ne prend pas compte de la dynamique de

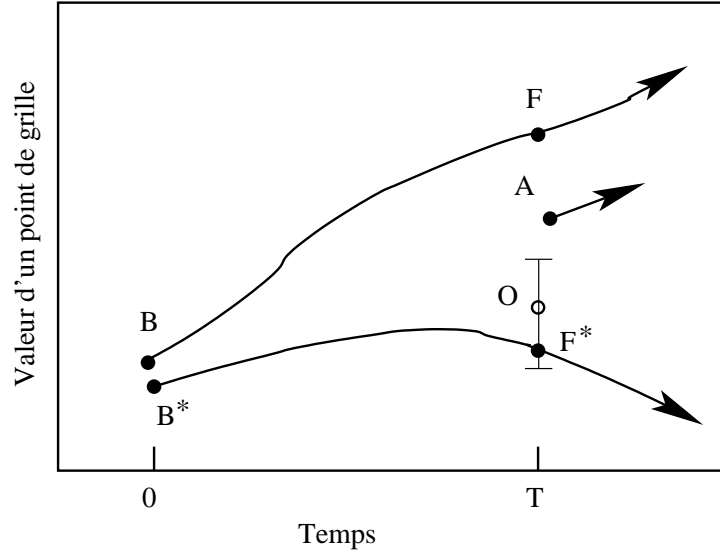


FIG. 5.2 – La méthode variationnelle et son principe (Errico, 1997).

courte durée et la perturbation $\epsilon(\Delta t)$ doit être infinitésimale (Smith et al., 1999; Smith, 2001).

5.3.1.1 La fonction coût

Lorsqu'on utilise une méthode variationnelle, il faut écrire le problème comme une fonctionnelle ou fonction coût que l'on cherchera à minimiser. La forme générale de la fonction coût est :

$$J = \int_0^T \int_{\Omega} f(\vec{\Psi}, \vec{x}, t) d\vec{x} dt \quad (5.13)$$

où $f(\vec{\Psi}, \vec{x}, t)$ est une fonction scalaire définie sur un domaine Ω et un intervalle de temps $[0, T]$ (Sanders & Katopodes, 2000). $f(\vec{\Psi}, \vec{x}, t)$ est une fonction de $\vec{\Psi}$ qui représente les variables d'état (variables physiques comme par exemple le champ magnétique ou la température), ainsi que de la position et du temps. Selon le problème à résoudre, nous choisissons une fonction $f(\vec{\Psi}, \vec{x}, t)$ appropriée. En assimilation de données, nous voulons minimiser l'erreur entre la prévision et les observations (Talagrand & Courtier, 1987) :

$$J(\vec{\Psi}) = \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} (\vec{\Psi} - \vec{\Psi}^0)^T \mathbf{W} (\vec{\Psi} - \vec{\Psi}^0) d\vec{x} dt. \quad (5.14)$$

où $\vec{\Psi}^0$ est les observations et \mathbf{W} , l'inverse de la covariance des observations, est utilisée comme poids statistique (Courtier, 1997). La fonction coût est tout simplement le carré de l'erreur entre la prédiction et les observations. Nous prenons le carré puisque c'est la magnitude de l'erreur qui nous intéresse et que, contrairement à la valeur absolue, une fonction quadratique est partout dérivable. La matrice \mathbf{W} sert à accorder plus d'importance aux observations prises avec des instruments plus précis.

Dans cette étude, on veut minimiser l'erreur dans le potentiel vecteur A de l'équation (4.27), donc la fonction coût utilisée est :

$$\mathcal{J} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_0^T (A - A_{\text{obs}}) W (A - A_{\text{obs}}) dt d\vec{x} \quad (5.15)$$

L'interprétation physique de A prend ici toute son importance puisqu'il faut associer les résultats du modèles avec les observations. Cette dernière idée devient ambiguë si A est le vecteur potentiel parce que l'Éq. (4.23) n'est plus une mesure évidente de l'énergie (Charbonneau et al., 2001). Une façon pour contourner cet obstacle serait d'utiliser l'*expérience des jumeaux identiques* où le même modèle numérique sert à la fois à l'assimilation de données et à l'obtention des données (Daley, 1991). Des observations synthétiques seront construites en utilisant un modèle d'avalanche où les paramètres ν et/ou λ seraient légèrement modifiés. Des décalages temporels et spatiaux seront également considérés. Cette technique est intéressante non pas pour la prévision mais pour la compréhension des éruptions. En considérant différents ensembles d'observations, on pourra déterminer à quel point le terme non-linéaire (Éq. 4.27) réduit la limite de prévisibilité.

5.3.1.2 Les équations adjointes

Le problème 4D-VAR consiste à trouver la trajectoire espace-temps des variables d'état $\vec{\Psi}$ qui minimisera la fonction coût (5.14) tout en obéissant aux équations physiques $\mathcal{E}(\vec{\Psi}, \vec{x}, t) = 0$ qui agissent à titre de contraintes. Ce problème est un problème de minimisation avec contraintes (Talagrand & Courtier, 1987).

Lagrange a mis au point la règle des multiplicateurs en généralisant un théorème de Fermat (1629) dans le but de résoudre des problèmes d'optimisation avec contraintes sous la forme d'une égalité (Jahn, 1996).

Considérons que nous voulons minimiser la fonction $f(y, z; x)$ où x est la variable indépendante ($y = y(x)$ et $z = z(x)$) avec la contrainte $g(y, z; x)$. Pour

trouver le minimum de $f(y, z; x)$, nous trouvons sa variation. L'opérateur variationnel δ sert à décrire le comportement d'une fonction près d'un point quelconque à l'aide d'un déplacement virtuel \vec{r} (Daley, 1991). Cet opérateur est similaire à l'opérateur différentiel d sauf que ce dernier utilise un déplacement réel (Daley, 1991). Nous avons donc :

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \delta z. \quad (5.16)$$

La variation de la contrainte $g(y, z; x)$ est quant à elle :

$$\delta g = \frac{\partial g}{\partial y} \delta y + \frac{\partial g}{\partial z} \delta z \quad (5.17)$$

Comme (5.17) est généralement égale à 0, nous avons :

$$\frac{\partial g}{\partial y} \delta y = -\frac{\partial g}{\partial z} \delta z. \quad (5.18)$$

Si on isole δy dans (5.16), nous obtenons :

$$\delta f = \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial z} \left(\frac{\partial g / \partial y}{\partial g / \partial z} \right) \right) \delta y \quad (5.19)$$

où nous avons substitué δz par (5.18). Nous sommes à un minimum si le contenu de la parenthèse de (5.19) est nul :

$$\frac{\partial f}{\partial y} \left(\frac{\partial g}{\partial y} \right)^{-1} = \frac{\partial f}{\partial z} \left(\frac{\partial g}{\partial z} \right)^{-1} \quad (5.20)$$

Puisque dans (5.20) nous avons des dérivées de f et de g par rapport à y à gauche et des dérivées par rapport à z à droite, nous pouvons dire que les deux côtés de l'égalité sont des fonctions de x (y et z sont des fonctions de x) que nous allons écrire $-\mu(x)$. Nous pouvons donc réécrire (5.20) :

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \mu(x) \frac{\partial g}{\partial y} = 0 \quad (5.21)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} + \mu(x) \frac{\partial g}{\partial z} = 0 \quad (5.22)$$

où $\mu(x)$ est connu comme un multiplicateur de Lagrange (Marion & Thornton, 1988).

Le lagrangien de la fonction coût est :

$$\mathcal{L}(\vec{\Psi}, \vec{\lambda}) = J(\vec{\Psi}) + \int_0^T \int_{\Omega} \vec{\lambda}(\vec{x}, t) \cdot \mathcal{E}(\vec{\Psi}, \vec{x}, t) d\vec{x} dt \quad (5.23)$$

où $J(\vec{\Psi})$ est la fonction coût et $\vec{\lambda}(\vec{x}, t)$ sont les multiplicateurs indéterminés de Lagrange aussi appelés variables adjointes (Sanders & Katopodes, 1999). Il a été démontré que trouver les points stationnaires de la fonction coût sous la contrainte $\mathcal{E}(\vec{\Psi}, \vec{x}, t) = 0$ est équivalent à trouver les points stationnaires du lagrangien par rapport aux variables $\vec{\Psi}$ et $\vec{\lambda}$ (Le Dimet & Talagrand, 1986).

Puisque le lagrangien doit être minimisé, ses points stationnaires doivent être connus. Ces derniers ne sont pas des minima ou des maxima absolus mais plutôt des points de selle (Le Dimet & Talagrand, 1986). Pour accomplir cette tâche, l'opérateur variationnel δ est appliqué au lagrangien. Ici, les directions de déplacement sont les variables physiques et adjointes du système. En prenant la variation du lagrangien, on obtient :

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} &= \vec{\nabla}_{\vec{\Psi}} \mathcal{L} \cdot \delta \vec{\Psi} + \vec{\nabla}_{\vec{\lambda}} \mathcal{L} \cdot \delta \vec{\lambda} \\ &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{\Psi}} \delta \vec{\Psi} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{\lambda}} \delta \vec{\lambda} \end{aligned} \quad (5.24)$$

Il faut noter que, du même coup, le problème a été linéarisé (Ehrendorfer, 1992). Pour un déplacement $(\delta \vec{\Psi}, \delta \vec{\lambda})$ arbitraire, le minimum est atteint seulement si $\delta \mathcal{L} = 0$ (Daley, 1991). Cela indique que la dérivée du lagrangien par rapport à chaque direction doit être nulle :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{\lambda}} = \mathcal{E}(\vec{\Psi}, \vec{x}, t) = 0 \quad (5.25)$$

et

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{\Psi}} = \text{Adj}(\vec{\lambda}) + \frac{\partial J}{\partial \vec{\Psi}} = 0 \quad (5.26)$$

où $\text{Adj}(\vec{\lambda})$ représente les équations adjointes après intégration par parties (Schröter et al., 1993; Wenzel, 2001). Notons que (5.25) est le système d'équations original. Enfin, (5.25) et (5.26) sont les équations d'Euler-Lagrange comme il a été noté par Le Dimet et Talagrand (1986).

Malheureusement, il n'existe pas de moyen efficace pour résoudre directement les équations d'Euler-Lagrange. Cette situation incite à reformuler le problème sous forme de problème sans contraintes (Talagrand & Courtier, 1987). Puisque

les équations physiques du modèle sont déterministes, il est évident que l'état du système aux temps des observations dépend seulement des conditions initiales $\vec{\Psi}_0$ du système. Cela met en évidence le fait que la fonction coût est une fonction implicite des conditions initiales car c'est en variant les conditions initiales que sera trouvée la solution des équations physiques qui va minimiser la fonction coût (Ehrendorfer, 1992). Selon la théorie du contrôle optimal (Lions, 1968), les variables de contrôle du problème sont les conditions initiales. On peut aussi utiliser les conditions aux frontières comme variables de contrôle (Wenzel, 2001). Dans ce problème, les contraintes ont été enlevées puisqu'aucune restriction n'est appliquée sur les conditions initiales.

Pour dériver les équations adjointes de l'Éq. (4.27) nous allons prendre la dérivée seconde des deux côtés pour réécrire le terme non-linéaire ($\frac{\partial^2 A_{xx}^3}{\partial x^2}$) :

$$\frac{\partial B}{\partial t} = -\nu \frac{\partial^4 B}{\partial x^4} - \lambda \frac{\partial^4 B^3}{\partial x^4} + F_{R_{xx}} \quad (5.27)$$

où $B \equiv A_{xx}$ (Liu et al., 2002). Les dérivées des coefficients ν et λ sont considérées comme étant très petites. L'équation est constitué d'une contribution linéaire (hyperdiffusion) et une contribution non-linéaire (couplage). De plus, la composante DC du terme de forçage a été éliminée. En réunissant les termes semblables, on obtient :

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\partial^4}{\partial x^4}(\nu B + \lambda B^3) - F_{R_{xx}} = 0. \quad (5.28)$$

Le lagrangien est :

$$\mathcal{L} = J(B) + \int_0^T \int_0^L B^* \frac{\partial B}{\partial t} + B^* \frac{\partial^4}{\partial x^4}(\nu B + \lambda B^3) - B^* F_{R_{xx}} dx dt \quad (5.29)$$

où B^* est la variable adjointe (multiplicateur de Lagrange) et $J(B)$ est la fonction coût (5.15) exprimée en terme de B . Après l'intégration par parties, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = J(B) &+ \int_0^T \int_0^L -B \frac{\partial B^*}{\partial t} + (\nu B + \lambda B^3) \frac{\partial^4 B^*}{\partial x^4} - B^* F_{R_{xx}} dx dt \\ &+ \int_0^L B^* B|_0^T dx \\ &+ \int_0^T \left[B^* \frac{\partial^3}{\partial x^3}(\nu B + \lambda B^3) - \frac{\partial B^*}{\partial x} \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\nu B + \lambda B^3) \right. \\ &\left. + \frac{\partial^2 B^*}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial x}(\nu B + \lambda B^3) - (\nu B + \lambda B^3) \frac{\partial^3 B^*}{\partial x^3} \right]_0^L dt \quad (5.30) \end{aligned}$$

La variation du lagrangien, si on néglige le second terme d'Éq. (5.24), est :

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{L} = & \frac{\partial J(B)}{\partial B} + \int_0^T \int_0^L \left[-\frac{\partial B^*}{\partial t} + (\nu + 3\lambda B^2) \frac{\partial^4 B^*}{\partial x^4} \right] \delta B \, dx \, dt \\
& + \int_0^L B^* \delta B|_0^T \, dx \\
& + \int_0^T \left[B^* \frac{\partial^3}{\partial x^3} (\nu \delta B + 3\lambda B^2 \delta B) - \frac{\partial B^*}{\partial x} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\nu \delta B + 3\lambda B^2 \delta B) \right. \\
& \left. + \frac{\partial^2 B^*}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial x} (\nu \delta B + 3\lambda B^2 \delta B) - (\nu \delta B + 3\lambda B^2 \delta B) \frac{\partial^3 B^*}{\partial x^3} \right]_0^L \, dt
\end{aligned} \tag{5.31}$$

En exigeant que $\delta\mathcal{L} = 0$, nous obtenons l'équation adjointe :

$$\frac{\partial B^*}{\partial \tau} + (\nu + 3\lambda B^2) \frac{\partial^4 B^*}{\partial x^4} = 0 \tag{5.32}$$

où $\tau = T - t$ est un temps mesuré dans le sens inverse. Cette équation (Éq. 5.32) est similaire à l'Éq. (4.27) sauf que le terme non-linéaire en B , $\frac{\partial^4 B^3}{\partial x^4}$, a été remplacé par le terme linéaire en B^* , $3\lambda B^2 \frac{\partial^4 B^*}{\partial x^4}$, et le terme de forçage a disparu. L'équation adjointe (Éq. 5.32) est donc une équation d'hyperdiffusion avec un coefficient donné par $\nu + 3\lambda B^2$. Ce coefficient dépendra des valeurs que B prendra durant la simulation directe (Éq. 4.27). Dans les régions où les avalanches ont eu lieu, la variable adjointe B^* sera beaucoup plus diffusée comparativement aux régions où aucune avalanche s'est produite. Lorsque $\lambda \rightarrow 0$, les termes multipliés par λ deviennent négligeables ainsi les équations physiques et adjointes sont identiques (hyperdiffusion avec coefficient ν). Les équations adjointes sont interprétées comme la sensibilité d'un modèle par rapport à certains paramètres. La sensibilité est l'étude de la façon dont les résultats (prévisions) du modèle changent selon ces paramètres (Hall & Cacuci, 1983; Errico, 1997; Sanders & Katopodes, 2000). Dans le cas de l'assimilation de données, les équations adjointes indiquent la sensibilité du système vis-à-vis les conditions initiales. Les conditions initiales de l'équation adjointe (Éq. 5.32) sont :

$$\delta B(t = 0) = 0 \tag{5.33}$$

$$B^*(\tau = 0) = 0 \tag{5.34}$$

et les conditions aux frontières sont :

$$B^*(x = 0) = 0 \quad B^*(x = L) = 0 \tag{5.35}$$

$$\left. \frac{\partial B^*}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad \left. \frac{\partial B^*}{\partial x} \right|_{x=L} = 0 \quad (5.36)$$

$$\left. \frac{\partial^2 B^*}{\partial x^2} \right|_{x=0} = 0 \quad \left. \frac{\partial^2 B^*}{\partial x^2} \right|_{x=L} = 0 \quad (5.37)$$

$$\left. \frac{\partial^3 B^*}{\partial x^3} \right|_{x=0} = 0 \quad \left. \frac{\partial^3 B^*}{\partial x^3} \right|_{x=L} = 0. \quad (5.38)$$

Ces conditions aux frontières sont choisies afin que la dernière intégrale dans l'Éq. (5.31) soit nulle. Les conditions aux frontières que nous avons choisies impliquent que la sensibilité aux conditions initiales de la courbure (i.e. B^*) est nulle aux frontières. C'est l'équivalent du grain de sable qui tombe en bas de la table dans le cas du tas de sable.

5.3.1.3 Algorithme pour l'assimilation de données 4D-VAR

La méthode d'assimilation de données 4D-VAR peut être décrite de la façon suivante (Fig. 5.3). À l'aide des conditions initiales, une première prévision est effectuée. Ensuite, les observations satellites disponibles sont utilisées pour calculer l'erreur entre la prévision et les observations. Cela se fait au moyen d'une fonction coût qui est conçue à cet effet (Talagrand & Courtier, 1987). Le gradient de cette fonction coût (5.14) est décrit par les équations adjointes obtenues en appliquant une procédure variationnelle au lagrangien du problème (Courtier & Talagrand, 1990). Un algorithme de minimisation itératif utilise le gradient de la fonction coût afin de déterminer la direction où celle-ci décroît le plus dans le but de trouver son minimum (Annexe B). Lorsque le minimum de la fonction coût sera trouvé, de nouvelles conditions initiales seront connues. Ces conditions initiales seront optimales parce qu'une seconde simulation directe utilisant celles-ci sera une prévision optimale. L'erreur entre cette nouvelle prévision et les observations sera alors minimale.

5.3.2 La méthode quasi-inverse

Afin de présenter la méthode quasi-inverse, nous allons passer en revue le formalisme des opérateurs linéaires tel que décrit par Kalnay et al., (2000). Soit M le modèle non-linéaire qui décrit l'évolution temporelle d'un état initial \mathbf{x}_0 jusqu'à un état final \mathbf{x}_t ($\mathbf{x}_t = M(\mathbf{x}_0)$), O_t l'observation au temps t , $E = M - O$ l'erreur, L le modèle tangent linéaire (approximation linéaire de M) et L^* le modèle adjoint.

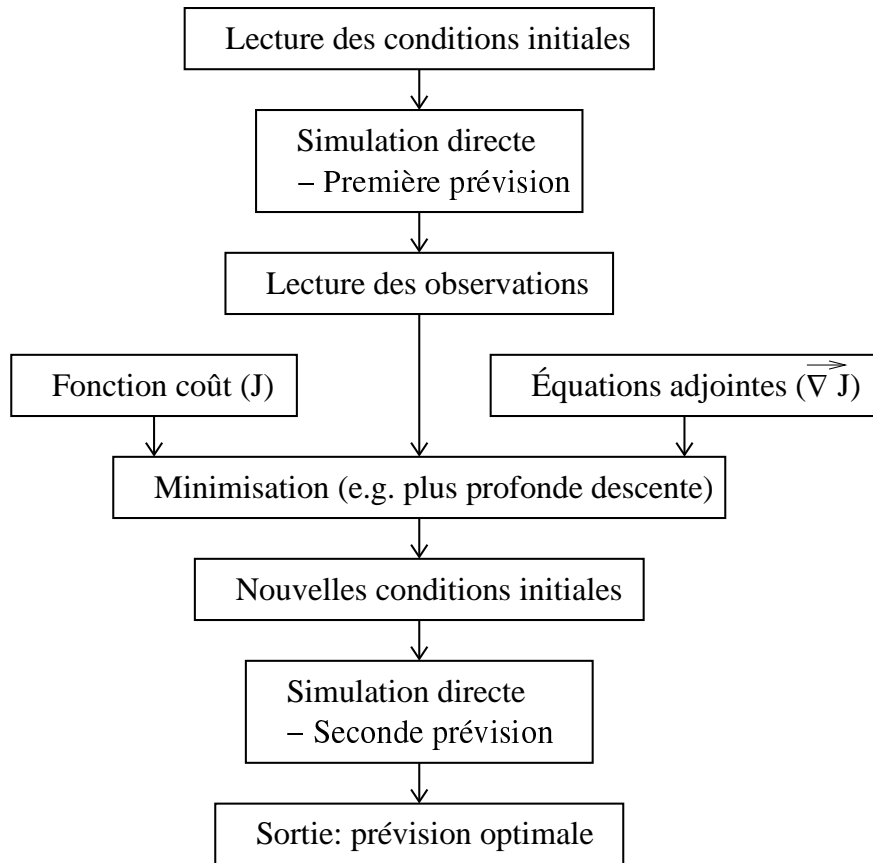


FIG. 5.3 – Algorithme général de la méthode 4D-VAR.

La perturbation $\delta\mathbf{x}_0$ des conditions initiales qui corrigera l'erreur dans la prévision est déterminée par :

$$M(\mathbf{x}_0 + \delta\mathbf{x}_0) = O_t \quad (5.39)$$

que l'on peut écrire comme :

$$\delta\mathbf{x}_t = L\delta\mathbf{x}_0 \cong M(\mathbf{x}_0) - O_t = E. \quad (5.40)$$

Nous allons établir la fonction coût en utilisant la norme d'énergie en imposant que l'énergie totale pour un état \mathbf{x} soit définie par $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \mathbf{x}^T W^2 \mathbf{x}$ où W est une matrice de poids statistiques. Avec le produit scalaire $\langle \mathbf{x}, L\mathbf{y} \rangle = \langle L^* \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$, le modèle adjoint est $L^* = W^{-2} L^T W^2$ où L^T est la transposée. La fonction coût est :

$$J = \frac{1}{2} \langle M(\mathbf{x}_0) - O_t, M(\mathbf{x}_0) - O_t \rangle \quad (5.41)$$

Une perturbation $\delta\mathbf{x}_0$ créera une variation dans la fonction coût :

$$\begin{aligned} \delta J &= \langle M(\mathbf{x}_0) - O_t, \delta\mathbf{x}_t \rangle \\ &= \langle M(\mathbf{x}_0) - O_t, L\delta\mathbf{x}_0 \rangle \\ &= \langle L^* [M(\mathbf{x}_0) - O_t], \delta\mathbf{x}_0 \rangle \\ &= \langle L^* E, \delta\mathbf{x}_0 \rangle. \end{aligned} \quad (5.42)$$

Puisque par définition $\delta J = \langle \nabla J(\mathbf{x}_0), \delta\mathbf{x}_0 \rangle$, le gradient de la fonction coût est :

$$\nabla J(\mathbf{x}_0) = L^* L \delta\mathbf{x}_0 = L^* E. \quad (5.43)$$

La correction à apporter aux conditions initiales, selon la méthode adjointe, est :

$$\delta\mathbf{x}_0 = \alpha \nabla J(\mathbf{x}_0) = \alpha L^* E \quad (5.44)$$

où α est une amplitude à ajuster (Kalnay et al., 2000). La correction $\delta\mathbf{x}_0$ est insérée dans l'Éq. (5.39) et le tout est itéré.

Dans la méthode inverse, l'opérateur adjoint L^* est remplacé par l'inverse du modèle tangent linéaire qui consiste à changer les signes des termes comprenant le temps :

$$\delta\mathbf{x}_0 = L^{-1} E. \quad (5.45)$$

Le paramètre α n'est plus nécessaire. La méthode quasi-inverse est une approximation de la méthode inverse où le signe des termes dissipatifs reste inchangé afin d'éviter des problèmes de stabilité numérique (Kalnay et al., 2000). Tandis que

la solution donnée par l'approche adjointe est "optimale" puisqu'il n'y a aucune contrainte sur l'amplitude de δx_0 , l'approche (quasi-)inverse est "parfaite" parce que la solution est atteinte en une étape sans itération (Kalnay et al., 2000). Malgré le fait que la méthode quasi-inverse comporte certains avantages comme la précision et la rapidité, il n'en demeure pas moins qu'elle possède quelques aspects qui devront être améliorés comme la croissance de bruit durant l'intégration inverse, les processus physiques qui ne peuvent être inversés et la nécessité de vérifier la performance de cette méthode avec des systèmes complexes (Kalnay et al., 2000).

Chapitre 6

Discussion : Ce que je prévois faire pour ma thèse

Malgré la recherche effectuée sur les éruptions solaires durant les dernières décennies, plusieurs questions demeurent sans réponse :

1. La proposition de Parker (1983) selon laquelle le chauffage de la couronne solaire serait dû aux petites éruptions ne semble pas être corroboré par les modèles d'avalanche. De plus, la nature fractale (McIntosh & Charbonneau, 2001) des éruptions solaires rend ardu l'estimation de l'énergie relâchée par l'éruption. Le problème du chauffage de la couronne solaire demeure donc irrésolu.
2. Le modèle d'avalanche implique qu'une importante éruption peut être produite à partir d'une petite ou grande perturbation. Ainsi, il serait très difficile, voire impossible, de prévoir les éruptions solaires puisque ces petites perturbations ne peuvent être observées.
3. Avec une dissipation d'énergie intermittente et spontanée par des structures de tailles suivant une distribution en loi de puissance, la turbulence MHD partage plusieurs points en commun avec les modèles d'avalanche. Comme la turbulence MHD peut jouer un rôle dans les processus de reconnexion, on ignore comment tenir compte de ces effets de la turbulence MHD dans les modèles d'avalanche.
4. Malgré le fait que la couronne solaire se comporte comme un système auto-organisé critique, nous ne savons pas si elle est vraiment dans un état d'auto-organisation critique.

Dans ce travail de thèse, nous allons aborder les points suivants :

1. Une étude plus approfondie des modèles d'avalanche, notamment l'importance relative des diverses contributions (linéaires, non-linéaires, diffusives)
2. La limite de prévisibilité du modèle d'avalanche et son comportement chaotique (exposants de Lyapunov)
3. Le rôle de la turbulence MHD dans les modèles d'avalanches

Les moyens suivants seront employés :

1. Un usage extensif du calcul numérique^{1,2}
2. Comme les éruptions solaires jouent un rôle important dans la physique solaire, l'utilisation de l'assimilation de données sera bénéfique pour permettre non pas la prévision de ces éruptions mais plutôt leur compréhension. L'assimilation de données pourra certainement apporter quelques éclaircissements à ce phénomène mal compris.
3. Nous allons débiter en étudiant un modèle d'avalanche 1D intégré à l'assimilation de données 4D-VAR. Progressivement, nous allons augmenter la complexité du modèle (avalanche 2D et 3D, MHD simplifié, MHD complexe) et utiliser diverses méthodes d'assimilation de données (4D-VAR, filtre de Kalman). Cela nous permettra de comparer tous ces modèles et de trouver lequel convient le mieux pour l'étude des éruptions solaires.

Le but de cette thèse est de mieux comprendre la physique des éruptions solaires. La fonction coût utilisée dans la méthode 4D-VAR doit être conçue en fonction du problème physique. Par exemple, dans le cas de la MHD, on peut choisir de minimiser l'erreur dans le champ de vitesse, ou dans le champ magnétique ou bien dans les deux. De plus, les variables de contrôle qui sont modifiées pour faire accorder le modèle physique aux observations peuvent prendre la forme des conditions initiales (comme démontré dans ce document), des conditions aux frontières ou des paramètres physiques. Quant au filtre de Kalman, il utilise la statistique de l'erreur du modèle physique et des observations. Ainsi, la méthode d'assimilation de données doit être choisie en tenant compte de la physique.

¹Afin d'effectuer les calculs dans des délais raisonnables, le code numérique sera optimisé en le parallélisant et un superordinateur parallèle, comme l'*Altix 3700* de *SGI* du Réseau québécois de calcul de haute performance (RQCHP), sera utilisé.

²Nous pouvons envisager que la méthode 4D-VAR nécessitera environ 80 fois plus de temps de calcul qu'une simulation numérique directe parce que la minimisation doit converger.

Bibliographie

- Aschwanden, M. J., Nightingale, R. W., Tarbell, T. D., & Wolfson, C. J. (2000a). Time variability of the “quiet” Sun observed with TRACE. I. Instrumental effects, event detection, and discrimination of extreme-ultraviolet microflares. *Astrophysical Journal*, 535, 1027–1046.
- Aschwanden, M. J., Tarbell, T. D., Nightingale, R. W., Schrijver, C. J., Title, A., Kankelborg, C. C., Martens, P., & Warren, H. P. (2000b). Time variability of the “quiet” Sun observed with TRACE. II. Physical parameters, temperature evolution, and energetics of extreme-ultraviolet nanoflares. *Astrophysical Journal*, 535, 1047–1065.
- Bak, P., Tang, C., & Wiesenfeld, K. (1987). Self-organized criticality : An explanation of 1/f noise. *Phys. Rev. Lett.*, 59(4), 381–384.
- Boffetta, G., Carbone, V., Giuliani, P., Veltri, P., & Vulpiani, A. (1999). Power laws in solar flares : Self-organized criticality or turbulence ? *Physical Review Letters*, 83, 4662–4665.
- Bolduc, L., Lévesque, F., Martimbeau, N., & DesRosiers, S. (2003). Le Soleil peut-il perturber un réseau électrique ? http://www.hydro.qc.ca/orage_magnetique/index.html.
- Bouttier, F. & Courtier, P. (1999). *Data assimilation concepts and methods*. European Centre for Medium-Range Weather Forecasts, Reading, Royaume-Uni. http://www.ecmwf.int/newsevents/training/rcourse_notes/pdf_files/Assim_concepts.pdf.
- Browning, P. K. (1991). Mechanisms of solar coronal heating. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, 33(6), 539–571.
- Burden, R. L. & Faires, J. D. (1993). *Numerical Analysis*. Boston : PWS Publishing Company.
- Charbonneau, P., McIntosh, S. W., Liu, H.-L., & Bogdan, T. J. (2001). Avalanche models for solar flares. *Solar Physics*, 203(2), 321–353.

- Chen, F. F. (1974). *Introduction to plasma physics*. New York : Plenum Press.
- Courtier, P. (1997). Variational methods. Dans M. Ghil, K. Ide, A. Bennett, P. Courtier, M. Kimoto, M. Nagata, M. Saiki, & N. Sato (Éds.), *Data Assimilation in Meteorology and Oceanography : Theory and Practice* (pp. 211–218). Tokyo : Meteorological Society of Japan.
- Courtier, P., Derber, J., Errico, R., Louis, J.-F., & Vukićević, T. (1993). Important literature on the use of adjoint, variational methods and the Kalman filter in meteorology. *Tellus*, 45A, 342–357.
- Courtier, P. & Talagrand, O. (1990). Variational assimilation of meteorological observations with the direct and adjoint shallow-water equations. *Tellus*, 42A, 531–549.
- Cowling, T. G. (1976). *Magnetohydrodynamics*. London : Hilger.
- Cressman, G. P. (1959). An operational objective analysis system. *Monthly Weather Review*, 87(10), 367–374.
- Daley, R. (1991). *Atmospheric Data Analysis*. Cambridge atmospheric and space science series. Cambridge : Cambridge University Press.
- Dennis, B. R. (1985). Solar hard X-ray bursts. *Solar Physics*, 100, 465–490.
- Ehrendorfer, M. (1992). Four-dimensional data assimilation : comparison of variational and sequential algorithms. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 118, 673–713.
- EIT (2003). The SOHO Extreme ultraviolet Imaging Telescope. <http://umbra.nascom.nasa.gov/eit/>.
- Errico, R. M. (1997). What is an adjoint model ? *Bulletin of the American Meteorological Society*, 78(11), 2577–2591.
- Fox, N. J. (2001). Solar-terrestrial connection : Space weather predictions. Dans *Encyclopedia of Astronomy and Astrophysics*. Nature Publishing Group. <http://zeus.nascom.nasa.gov/~pbrekke/articles/ENC/fox.pdf>.
- Galsgaard, K. & Nordlund, Å. (1996). The heating and activity of the solar corona : 1. Boundary shearing of an initially homogeneous magnetic field. *Journal of Geophysical Research*, 101(A6), 13445–13460.
- Hall, M. C. G. & Cacuci, D. G. (1983). Physical interpretation of the adjoint functions for sensitivity analysis of atmospheric models. *Journal of the atmospheric sciences*, 40, 2537–2546.
- Hoyt, D. V. & Schatten, K. H. (1997). *The role of the sun in climate change*. Oxford : Oxford University Press.

- Hughes, D., Paczuski, M., Dendy, R. O., Helander, P., & McClements, K. G. (2003). Solar flares as cascades of reconnecting magnetic loops. *Phys. Rev. Lett.*, 90(13), 131101, 1–4.
- Ide, K., Courtier, P., Ghil, M., & Lorenc, A. (1997). Unified notation for data assimilation : Operational, sequential and variational. Dans M. Ghil, K. Ide, A. Bennett, P. Courtier, M. Kimoto, M. Nagata, M. Saiki, & N. Sato (Éds.), *Data Assimilation in Meteorology and Oceanography : Theory and Practice* (pp. 71–79). Tokyo : Meteorological Society of Japan.
- Jahn, J. (1996). *Introduction to the theory of nonlinear optimization*. New York : Springer, 2^e édition.
- Kalman, R. E. (1960). A new approach to linear filtering and prediction problems. *Journal of Basic Engineering*, 82(Série D), 35–45.
- Kalnay, E. (2003). *Atmospheric modeling, data assimilation and predictability*. Cambridge, UK : Cambridge University Press.
- Kalnay, E., Ki Park, S., Pu, Z.-X., & Gao, J. (2000). Application of the quasi-inverse method to data assimilation. *Monthly Weather Review*, 128(3), 864–875.
- Kantha, L. H. & Clayson, C. A. (2000). *Numerical Models of Oceans and Oceanic Processes*, volume 66 de *International Geophysics Series*, chapitre 14. Academic Press.
- Lagarde, T. (2000). *Nouvelle approche des méthodes d'assimilation de données : les algorithmes de point de selle*. Thèse de doctorat, Université Paul Sabatier, Toulouse.
- Lang, K. R. (2001). *The Cambridge Encyclopedia of the Sun*. New York : Cambridge University Press.
- LASCO (2003). The Naval Research Laboratory Large Angle and Spectrometric Coronagraph Experiment (LASCO). <http://lasco-www.nrl.navy.mil/lasco.html>.
- Le Dimet, F.-X. & Talagrand, O. (1986). Variational algorithms for analysis and assimilation of meteorological observations : theoretical aspects. *Tellus*, 38A, 97–110.
- Lina, J. M. (1998). *Introduction aux filtres de Kalman*. Rapport technique, RCM2.
- Lions, J. L. (1968). *Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles*. Paris : Dunod.

- Liu, H.-L., Charbonneau, P., Pouquet, A., Bogdan, T., & McIntosh, S. (2002). Continuum analysis of an avalanche model for solar flares. *Physical Review E*, 66, 056111.
- Longcope, D. W. & Sudan, R. N. (1994). Evolution and statistics of current sheets in coronal magnetic loops. *Astrophysical Journal*, 437, 491–504.
- Lorenç, A. C. (1986). Analysis methods for numerical weather prediction. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 112, 1177–1194.
- Lorenz, E. N. (1963). Deterministic nonperiodic flow. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 20(2), 130–141.
- Lorenz, E. N. (1985). The growth of errors in prediction. Dans M. Ghil (Éd.), *Turbulence and predictability in geophysical fluid dynamics and climate dynamics* (pp. 243–265). : Italian Physical Society North-Holland.
- Lu, E. T., Hamilton, R. J., McTiernan, J. M., & Bromund, K. R. (1993). Solar flares and avalanches in driven dissipative systems. *Astrophysical Journal*, 412, 841–852.
- Madsen, H. & Cañizares, R. (1999). Comparison of extended and ensemble kalman filters for data assimilation in coastal area modelling. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 31, 961–981.
- Marion, J. B. & Thornton, S. T. (1988). *Classical dynamics of particles & systems*. San Diego : Harcourt Brace Jovanovich, 3^eédition.
- McIntosh, S. W. & Charbonneau, P. (2001). Geometric effects in avalanche models of solar flares : implications for coronal heating. *Astrophysical Journal Letters*, 563(2), L165–L168.
- Mikić, Z., Schnack, D. D., & Van Hoven, G. (1989). Creation of current filaments in the solar corona. *Astrophysical Journal*, 338, 1148–1157.
- Norman, J. P., Charbonneau, P., McIntosh, S. W., & Liu, H.-L. (2001). Waiting-time distributions in lattice models of solar flares. *Astrophysical Journal*, 557, 891–896.
- Parker, E. N. (1983a). Magnetic neutral sheets in evolving fields. I - General theory. *Astrophysical Journal*, 264, 635–641.
- Parker, E. N. (1983b). Magnetic neutral sheets in evolving fields. II - Formation of the solar corona. *Astrophysical Journal*, 264, 642–647.
- Parker, E. N. (1988). Nanoflares and the solar X-ray corona. *Astrophysical Journal*, 330, 474–479.

- Sanders, B. F. & Katopodes, N. D. (1999). Control of canal flow by adjoint sensitivity method. *Journal of irrigation and drainage engineering*, 125(5), 287–297.
- Sanders, B. F. & Katopodes, N. D. (2000). Adjoint sensitivity analysis for shallow-water wave control. *Journal of Engineering Mechanics*, 126(9), 909–919.
- Schröter, J., Seiler, U., & Wenzel, M. (1993). Variational assimilation of GEOSAT data into a eddy-resolving model of the Gulf Stream extension area. *Journal of Physical Oceanography*, 23(5), 925–953.
- Shohet, J. L. (1971). *The plasma state*. New York : Academic Press.
- Smith, L. A. (2001). Disentangling uncertainty and error : On the predictability of nonlinear systems. Dans A. Mees (Éd.), *Nonlinear Dynamics and Statistics* (pp. 31–64). Boston : Birkhäuser.
- Smith, L. A., Ziehmann, C., & Fraedrich, K. (1999). Uncertainty dynamics and predictability in chaotic systems. *Quart. J. Royal Meteorological Soc.*, 125, 2855–2886.
- SOHO (2003). The Solar and Heliospheric Observatory. <http://sohowww.nascom.nasa.gov/>.
- Talagrand, O. (1997). Assimilation of observations, an introduction. Dans M. Ghil, K. Ide, A. Bennett, P. Courtier, M. Kimoto, M. Nagata, M. Saiki, & N. Sato (Éds.), *Data Assimilation in Meteorology and Oceanography : Theory and Practice* (pp. 191–209). Tokyo : Meteorological Society of Japan.
- Talagrand, O. & Courtier, P. (1987). Variational assimilation of meteorological observations with the adjoint vorticity equation. I : Theory. *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, 113, 1311–1328.
- Tanenbaum, B. S. (1967). *Plasma physics*. Toronto : McGraw-Hill.
- Todling, R. & Cohn, S. E. (1994). Suboptimal schemes for atmospheric data assimilation based on the Kalman filter. *Monthly Weather Review*, 122, 2530–2557.
- TRACE (2003). TRACE : The Transition Region and Coronal Explorer. <http://vestige.lmsal.com/TRACE/>.
- Valdettaro, L. (1992). *Simulations numériques d'écoulements magnétohydrodynamiques compressibles en géométrie sphérique*. Thèse de doctorat, Université de Toulouse III.

Wenzel, M. (2001). *Adjoint Method (4D-VAR)*. The Alfred Wegener Institute Foundation for Polar and Marine Research. <http://e-net.awi-bremerhaven.de/Modelling/INVERSE/adjoint.html>.

Wheatland, M. S. (2000). The origin of the solar flare waiting-time distribution. *Astrophysical Journal*, 536, L109–L112.

Annexe A

Le gain de Kalman et la covariance de l'erreur assimilée

L'erreur de la valeur assimilée, $e_{a,n}$, s'écrit :

$$\begin{aligned} e_{a,n} &= X_{a,n} - X_{v,n} \\ &= X_{p,n} + K_n(X_{o,n} - X_{p,n}) - X_{v,n} \\ &= K_n(X_{o,n} - X_{p,n}) - (X_{v,n} - X_{p,n}) \\ &= K_n(X_{o,n} - X_{v,n} + X_{v,n} - X_{p,n}) - (X_{v,n} - X_{p,n}) \\ &= K_n(e_{o,n} + e_{p,n}) - e_{p,n} \end{aligned} \tag{A.1}$$

En utilisant (A.1), nous pouvons trouver la covariance de la valeur assimilée :

$$\begin{aligned} P_{a,n} &= \overline{e_{a,n}e_{a,n}} \\ &= \overline{[K_n(e_{o,n} + e_{p,n}) - e_{p,n}][K_n(e_{o,n} + e_{p,n}) - e_{p,n}]} \\ &= \overline{K_n(e_{o,n} + e_{p,n})K_n(e_{o,n} + e_{p,n}) - e_{p,n}K_n(e_{o,n} + e_{p,n})} \\ &\quad - \overline{e_{p,n}K_n(e_{o,n} + e_{p,n})} + \overline{e_{p,n}e_{p,n}} \\ &= K_n(R_n + P_n)K_n - P_nK_n - P_nK_n + P_n \end{aligned} \tag{A.2}$$

Nous avons assumé que $\overline{e_{p,n}e_{o,n}} = 0 = \overline{e_{o,n}e_{p,n}}$, c'est-à-dire que les erreurs du modèle et des observations ne sont pas corrélées. Pour trouver le minimum de $P_{a,n}$, sa dérivée par rapport à K_n doit être nulle (Lina, 1998) :

$$\frac{dP_{a,n}}{dK_n} = 0$$

$$\begin{aligned}
2K_n(R_n + P_n) - P_n - P_n &= 0 \\
K_n(R_n + P_n) &= P_n \\
K_n &= P_n(R_n + P_n)^{-1}
\end{aligned} \tag{A.3}$$

L'équation (A.3) nous donne donc le gain de Kalman. La covariance de l'erreur de la valeur assimilée devient alors :

$$\begin{aligned}
P_{a,n} &= P_n(R_n + P_n)^{-1}(R_n + P_n)P_n(R_n + P_n)^{-1} \\
&- P_nP_n(R_n + P_n)^{-1} - P_nP_n(R_n + P_n)^{-1} + P_n \\
&= P_nP_n(R_n + P_n)^{-1} - P_nP_n(R_n + P_n)^{-1} - P_nP_n(R_n + P_n)^{-1} + P_n \\
&= P_n - P_nP_n(R_n + P_n)^{-1} \\
&= (1 - K_n)P_n.
\end{aligned} \tag{A.4}$$

Annexe B

Algorithme de minimisation

La fonction coût est minimisée à l'aide d'un algorithme de minimisation tel que la plus profonde descente, le gradient conjugué ou le quasi-Newton. Pour la simplicité, nous allons expliquer la méthode de la plus profonde descente pour une fonction coût à une dimension (Fig. B.1). D'abord, nous évaluons la fonction coût à un point initial Ψ_0 . Comme point initial, nous avons soustrait l'erreur des conditions initiales. Cela donne un bon point de départ près du minimum puisque pour un système linéaire, la perturbation initiale sera de même magnitude que la perturbation finale. Pour un système non-linéaire, cela est également vrai si les non-linéarités n'ont pas eu le temps de jouer, c'est-à-dire le modèle doit être intégré sur un court intervalle de temps. Ensuite, nous devons déterminer la direction où J décroît le plus dans le but de trouver un nouveau point plus près du minimum, c'est-à-dire que nous voulons itérer :

$$\Psi_{k+1} = \Psi_k + \alpha_k \vec{p}_k \quad (\text{B.1})$$

où k dénote l'itération, α_k est la longueur du pas que nous allons effectuer et \vec{p}_k est la direction de recherche du minimum. Dans le cas de la plus profonde descente, cette direction est le sens opposé du gradient ($\vec{p}_k = -\vec{\nabla} J$). Pour la méthode de Newton, nous devons résoudre le système $Q \vec{p}_k = -\vec{\nabla} J$ où Q est la matrice hessienne tandis que pour le quasi-Newton $S \vec{p}_k = -\vec{\nabla} J$ où S est une approximation de la matrice hessienne (Kalnay et al., 2000). On évalue J au nouveau point Ψ_{k+1} . Si $J(\Psi_{k+1}) < J(\Psi_k)$, on accepte Ψ_{k+1} en augmentant k et on recalcule (B.1). D'un autre côté, si $J(\Psi_{k+1}) > J(\Psi_k)$ on refuse Ψ_{k+1} et on recommence (B.1) avec un α_k plus petit. On continue jusqu'à ce que le gradient atteigne la valeur souhaitée ($\vec{\nabla} J \approx 0$) (Burden & Faires, 1993).

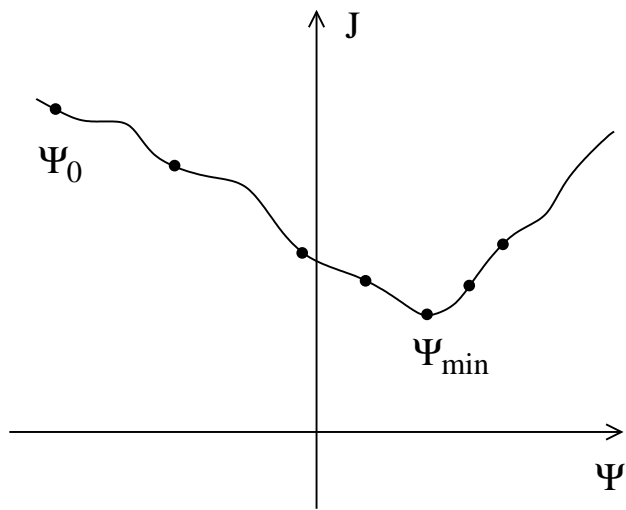


FIG. B.1 – Schéma de la fonction coût.