

Université de Montréal

**Assimilation de données variationnelle quadridimensionnelle pour les
écoulements turbulents biphasiques en eaux peu profondes**

par

Eric Bélanger

Département de physique

Faculté des arts et des sciences

**Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de
Maître ès sciences (M.Sc.)
en physique**

août, 2002

© Eric Bélanger, 2002

**Université de Montréal
Faculté des études supérieures**

Ce mémoire intitulé :

**Assimilation de données variationnelle quadridimensionnelle pour les
écoulements turbulents biphasiques en eaux peu profondes**

présenté par :

Eric Bélanger

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

Bernard Goulard, président rapporteur

Alain Vincent, directeur de recherche

Jean-Marc Lina, membre du jury

Mémoire accepté le :

Sommaire

Le but de ce travail est d'étudier la possibilité d'utiliser les techniques d'assimilation de données pour la prédiction des inondations. Nous dresserons d'abord un inventaire des différentes méthodes d'assimilation de données dont la technique que nous allons utiliser dans cette étude : l'assimilation de données variationnelle quadridimensionnelle. Les méthodes d'assimilation de données sont une façon d'inclure les données d'observation dans les simulations numériques afin de permettre des prédictions plus exactes.

Nous définissons une fonction coût, qui est l'erreur entre les prédictions et les observations. Afin de trouver son minimum, nous trouvons son gradient à l'aide des équations adjointes que nous obtenons grâce à une formulation lagrangienne.

Après le développement détaillé des équations en eaux peu profondes et de la physique du transport des sédiments, nous simulons le contournement du barrage Chute-Garneau lors de l'inondation de 1996.

Enfin, nous posons le problème de la prévisibilité d'un tel écoulement.

Mots clés :

Physique des fluides ; Assimilation de données ; Eau peu profonde ; Transport de sédiments ; Rivière Chicoutimi ; Exposants de Lyapunov ; Équations adjointes ; Problème variationnel.

Summary

The goal of this work is to study the possibility of using the data assimilation technics for flooding forecast. We will first list the different data assimilation methods including the one that we will use in this study : four-dimensional variational data assimilation. Data assimilation let us include observational data in the numerical simulation to obtain better forecast.

We define a cost function which is the error between the forecast and the observations. In order to find its minimum, we find its gradient with the adjoint equations obtained by a Lagrangian formulation.

After a detailed derivation of the shallow-water equations and of the physics of sediment transport, we simulate the by-pass of the Chute-Garneau dam during the 1996 flood.

Finally, we will evaluate the predictability of such a flow.

Key Words :

Physics of fluids ; Data assimilation ; Shallow-water equations ; Sediment transport ; Chicoutimi River ; Lyapunov exponents ; Adjoint equations ; Variational problem.

Table des matières

1	Introduction	1
1.1	Motivation : le contournement du barrage de Chute-Garneau	1
1.2	Historique des méthodes d'analyse objective et d'assimilation de données	3
1.2.1	Les premières prévisions	3
1.2.2	Hiéarchie des méthodes modernes	3
1.2.2.1	Les méthodes de corrections successives	4
1.2.2.2	Une méthode séquentielle : le filtre de Kalman	4
1.2.2.3	Les méthodes variationnelles	7
1.3	Présentation du travail	9
1.4	Les objectifs de ce travail	10
1.5	Contributions originales	10
2	Formulation lagrangienne de la méthode 4D-VAR	12
2.1	La fonction coût	13
2.1.1	Application en assimilation de données	13
2.1.2	Application en contrôle optimal	15
2.1.2.1	Écoulement autour d'une aile d'avion	15
2.1.2.2	Écoulement au-dessus d'une plaque	16
2.1.2.3	Écoulement autour d'un cylindre	16
2.1.3	Application : <i>Deep Blue</i>	17
2.2	Les méthodes variationnelles	17
2.2.1	La minimisation avec contraintes	17
2.2.2	La minimisation sans contraintes	18
3	Modélisation physique de l'écoulement en eaux peu profondes	22
3.1	Niveaux de référence	22
3.2	Dérivation des équations de Saint-Venant	23

3.2.1	Conservation de la masse	23
3.2.2	Conservation de la quantité de mouvement	24
3.2.2.1	Le cisaillement du lit	25
3.2.3	Les équations originelles de Saint-Venant	27
3.2.4	Conservation de la masse pour les sédiments	28
3.3	Les équations en eaux peu profondes en 2D	30
3.4	Changement d'échelles des équations	31
3.5	Ondes de surface	33
3.6	Les équations adjointes Saint-Venant 1D	34
3.7	Les équations adjointes en 2D	37
4	Algorithmes et aspects numériques	38
4.1	Algorithme de la méthode 4D-VAR	38
4.2	Discrétisation	38
4.2.1	Discrétisation du problème direct	38
4.2.2	Discrétisation des équations adjointes	42
4.3	Viscosité artificielle	43
4.4	Algorithme de minimisation	45
5	Deux expériences de contournement	47
5.1	Contournement d'un barrage théorique	48
5.2	Contournement du barrage Chute-Garneau	52
5.3	La limite de validité de la méthode	56
6	Conclusion et perspectives	60
A	L'équation de Burgers	xi
A.1	L'équation de Burgers et ses applications	xi
A.1.1	Modèle pour la croissance d'une interface	xi
A.1.2	Mathématiques financières	xii
A.1.3	Écoulement d'un embouteillage	xii
A.2	Discrétisation utilisée	xii
A.3	La fonction coût et son gradient	xiii
A.4	Le problème adjoint	xiv
A.5	Une expérience numérique	xvi
A.5.1	L'initialisation	xvi
A.5.2	Les résultats	xvi

A.5.3	Coût de calcul	xvii
B	Panache thermique	xx
B.1	Les équations physiques	xxii
B.2	Les équations adjointes	xxiii
C	Prospection électrique	xxviii
D	Vectorisation du code	xxx

Liste des tableaux

5.1	Minimisation de la fonction coût pour le barrage théorique	51
5.2	Les erreurs dans la prédiction pour le barrage théorique	51
5.3	Minimisation de la fonction coût pour le barrage Chute-Garneau	56
5.4	Les erreurs dans la prédiction pour le barrage Chute-Garneau	56
A.1	Temps de calcul	xviii

Table des figures

1.1	Précipitation totale en mm, figure tirée de (Perrier & Slivitzky, 1999)	2
1.2	Dessin du voisinage du barrage Chute-Garneau	2
1.3	Application de la méthode de Cressman à un modèle à une dimension, d'après (Bouttier & Courtier, 1999)	5
1.4	La méthode 4D-VAR et son principe, d'après (Errico, 1997)	8
3.1	Les différents niveaux de référence utilisés dans les équations de Saint-Venant	22
3.2	Volume élémentaire V de fluide	23
3.3	Colonnes d'eau qui se déplacent	24
3.4	Modes de transport des sédiments d'après (Fredsoe & Deigaard, 1992) : a) transport à petites forces de cisaillement, b) transport en couche, c) sédiments en suspension	28
3.5	Conservation du débit de sédiments, d'après (Chanson, 1999)	28
4.1	Algorithme de la méthode 4D-VAR	39
4.2	Schéma de la fonction coût	45
5.1	Précipitation cumulative en mm, figure tirée de (Perrier & Slivitzky, 1999)	48
5.2	Bathymétrie du barrage théorique pour le contournement	49
5.3	Forme de la rivière	49
5.4	Hauteur d'eau du barrage théorique à $t=0$	50
5.5	Hauteur d'eau du barrage théorique à $t=2$ min.	50
5.6	Erreur dans la hauteur d'eau au barrage théorique avec la méthode 4D-VAR ($t=2$ min.)	52
5.7	Bathymétrie près du barrage Chute-Garneau	53
5.8	Simulation du contournement du barrage Chute-Garneau (3 heures)	54
5.9	Hauteur d'eau du barrage Chute-Garneau à $t=0$	55

5.10	Hauteur d'eau du barrage Chute-Garneau à t=6 min.	55
5.11	Erreur dans la hauteur d'eau au barrage Chute-Garneau avec la méthode 4D-VAR (t=6 min.)	57
5.12	Qualité de la prédiction	58
5.13	La croissance de l'erreur et les exposants de Lyapunov	59
A.1	Conditions initiales et correction	xvii
A.2	Prévisions et observations	xviii
A.3	Magnitude des erreurs des prévisions et de la correction	xix
B.1	Simulation d'un plume thermique	xxi

Chapitre 1

Introduction

1.1 Motivation : le contournement du barrage de Chute-Garneau

Le lit d'une rivière est un milieu actif et peut se dégrader au cours du temps. Les causes de ces dégradations sont nombreuses. Il y a le débit moyen, le transport de sédiments et le développement du lit (Espinoza et al., 1996). De plus, l'activité humaine peut également jouer un grand rôle (Lapointe, 1994). Une rivière dont le lit est trop fragilisé peut même, en cas de précipitation abondante, changer brutalement de cours.

En juillet 1996, la région du Saguenay reçoit plus de 200 mm de pluie en 36 heures (Brooks & Lawrence, 2000). La figure (1.1) indique que c'est au sud de la rivière Saguenay qu'il y a eu les plus importantes averses (Perrier & Sliwitzky, 1999). Ces énormes précipitations ont été de deux à trois fois supérieures au maximum enregistré durant les 120 dernières années (Lapointe et al., 1998). À cause de ce déluge, le niveau d'eau de plusieurs rivières, dont la rivière Chicoutimi, augmente causant une accumulation d'eau au niveau du barrage (fig. 1.2). L'eau a accéléré l'érosion de la berge près du barrage ce qui créa une incision. La rivière s'engagea dans ce nouveau chenal pour contourner le barrage (INRS-Eau, 1997). Malheureusement, ce déluge causa de nombreuses pertes allant des infrastructures endommagées jusqu'au drame des sinistrés (Brooks & Lawrence, 1998; Nicolet et al., 1997). Suite à cet incident, nous nous apercevons de l'importance de pouvoir faire des prévisions hydrologiques à court terme comme un intervalle de 6 heures par exemple. Les difficultés rencontrées dans la prédiction de ces phénomènes naturels sont dues au fait qu'il faut modéliser des équations physiques

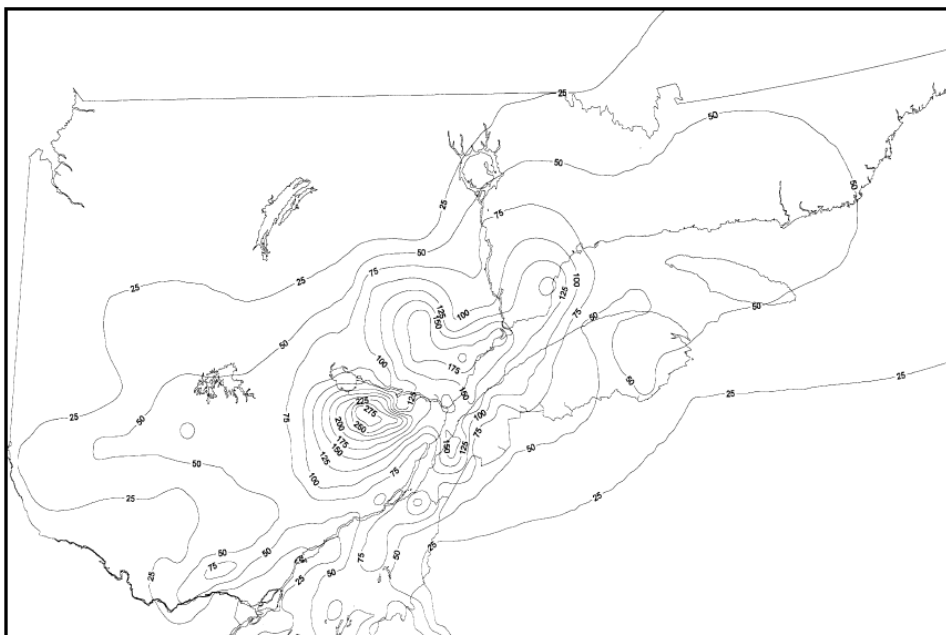


FIG. 1.1 – Précipitation totale en mm, figure tirée de (Perrier & Slivitzky, 1999).
<http://www.criacc.qc.ca/climat/suivi/extreme/survol.pdf>

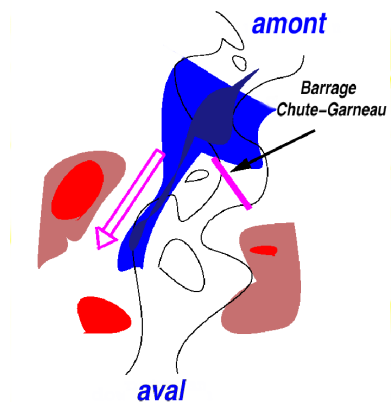


FIG. 1.2 – Dessin du voisinage du barrage Chute-Garneau

complexes et ce d'autant plus que nous ne connaissons pas les conditions initiales exactes du système (Daley, 1991; Le Dimet & Talagrand, 1986). On peut se demander quelles seraient les répercussions d'une erreur de 4 cm d'eau, soit l'effet d'une grosse pluie, dans la prédiction du niveau d'eau d'une rivière.

1.2 Historique des méthodes d'analyse objective et d'assimilation de données

1.2.1 Les premières prévisions

Le premier observatoire météorologique remonte aux années 1600 mais le premier service de météo prit naissance en France pour étudier le parcours d'une tempête dans la Méditerranée. On a ensuite vu un essor de plusieurs centres dans les autres nations. Néanmoins, ce fut seulement dans le XIX^e siècle que l'on mis au point un réseau mondial de surveillance et de prévision météorologique. Les premières tentatives de prédiction de la météo à partir des équations discrétisées et des conditions initiales furent réalisées par Richardson (1922) (Daley, 1991). Malheureusement, le concept d'initialisation était inconnu à l'époque. L'initialisation demande que les vitesses des vents et pressions initiales soient choisies de façon à ce qu'un équilibre (équilibre masse-vent) soit respecté afin d'éviter la manifestation d'oscillations provenant des ondes d'inertie-gravité (Coiffier, 2000). L'ignorance de ce problème fit en sorte que les tentatives de Richardson furent infructueuses (Coiffier, 2000; Daley, 1991). Depuis, les prédictions se sont améliorées avec l'avènement des ordinateurs et des instruments d'observation plus sophistiqués ainsi qu'au perfectionnement des modèles numériques.

1.2.2 Hiérarchie des méthodes modernes

Malgré les progrès effectués, le problème posé par le manque de fiabilité et d'exactitude des prédictions demeure. Nous devons effectuer une prédiction d'un système complexe (et chaotique). Une façon d'obtenir de meilleures prédictions est d'utiliser l'assimilation de données qui permet d'incorporer les observations dans les modèles numériques (Courtier & Talagrand, 1990; Talagrand & Courtier, 1987). Les champs produits par l'assimilation de données doivent ressembler aux observations tout en obéissant aux lois physiques connues et/ou à des relations statistiques (Le Dimet & Talagrand, 1986).

Les méthodes d'assimilation de données existent en trois catégories principales. Elles sont, en ordre croissant de complexité : les méthodes de corrections successives, les méthodes séquentielles et les méthodes variationnelles (Le Dimet & Talagrand, 1986). Ces méthodes peuvent toutefois comporter plusieurs variantes (Lagarde, 2000).

1.2.2.1 Les méthodes de corrections successives

Les méthodes de corrections successives (connues sous le nom de méthodes de Cressman) consistent à corriger successivement une ébauche jusqu'à ce qu'elle comprenne les observations recueillies. L'ébauche est obtenue par une prévision précédente ou par un état trivial dû à des contraintes physiques. Sur la figure (1.3), représentant un champ physique comme une pression en fonction de la position, l'ébauche est en pointillé et nous avons trois observations (●). Nous obtenons une analyse à l'aide de l'équation suivante :

$$x_a(i) = x_b(i) + w(i)E(i) \quad (1.1)$$

où $w(i)$ est un poids statistique qui dépend d'un certain rayon où l'observation est dite invalide et de la distance entre l'observation et le point de grille. $E(i)$ est la différence entre l'observation et l'ébauche. En cas de besoin, nous pouvons soumettre l'analyse à des routines de lissage (Cressman, 1959). Malgré ses déficiences, notamment au sujet de l'utilisation possible d'observations erronées et de résultats qui n'obéissent pas aux lois physiques, cette méthode simple et économique est encore utilisée de nos jours pour diverses applications (Bouttier & Courtier, 1999).

1.2.2.2 Une méthode séquentielle : le filtre de Kalman

Dans cette section, nous allons expliquer le filtre de Kalman pour un système linéaire (Kalman, 1960). Le filtre de Kalman a été développé dans le but de filtrer les signaux électriques (Talagrand, 1997). Il est à la base de presque toutes les méthodes séquentielles et peut être décrit comme suit. D'abord, nous avons une prédiction $X_{p,n}$ où X est une variable d'état et n indique l'itération en temps. Cette prédiction est obtenue à l'aide du modèle numérique :

$$X_{p,n} = L_{n-1}X_{a,n-1} \quad (1.2)$$

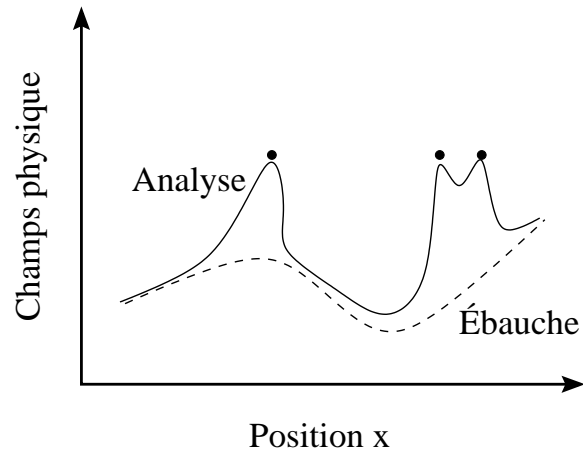


FIG. 1.3 – Application de la méthode de Cressman à un modèle à une dimension, d’après (Bouttier & Courtier, 1999)

où L_{n-1} est un opérateur linéaire représentant les équations physiques. Cette opérateur est appliqué à la valeur assimilée $X_{a,n-1}$ qui est la meilleure combinaison de la prédiction du modèle $X_{p,n-1}$ et de l’observation $X_{o,n-1}$. Si la véritable valeur de X est donné par le modèle numérique auquel nous avons ajouté un bruit additif $e_{v,n-1}$. La covariance de ce bruit est $Q_{n-1} = \overline{e_{v,n-1}e_{v,n-1}}$ où le surlignement indique une moyenne, nous avons :

$$X_{v,n} = L_{n-1}X_{v,n-1} + e_{v,n-1} \quad (1.3)$$

L’obtention de la valeur assimilée se fait en minimisant la moyenne du carré de l’erreur d’estimation $e_{a,n} = \overline{(X_{a,n} - X_{v,n})^2}$ où $X_{v,n}$ est la véritable valeur de X . Soit :

$$e_{p,n} = X_{v,n} - X_{p,n} = e_{v,n-1} - L_{n-1}e_{a,n-1} \quad (1.4)$$

l’erreur de la prédiction,

$$e_{o,n} = X_{o,n} - X_{v,n} \quad (1.5)$$

l’erreur dans l’observation,

$$P_n = Q_{n-1} + L_{n-1}P_{a,n-1}L_{n-1} \quad (1.6)$$

la covariance de l’erreur de la prédiction et

$$R = \overline{e_{o,n}e_{o,n}} \quad (1.7)$$

la covariance de l'erreur dans l'observation.

De plus, nous allons définir la valeur assimilée $X_{a,n}$ par :

$$X_{a,n} = X_{p,n} + K_n(X_{o,n} - X_{p,n}) \quad (1.8)$$

où K_n est le gain de Kalman. L'erreur de la valeur assimilée, $e_{a,n}$, devient :

$$\begin{aligned} e_{a,n} &= X_{a,n} - X_{v,n} \\ &= X_{p,n} + K_n(X_{o,n} - X_{p,n}) - X_{v,n} \\ &= K_n(X_{o,n} - X_{p,n}) - (X_{v,n} - X_{p,n}) \\ &= K_n(X_{o,n} - X_{v,n} + X_{v,n} - X_{p,n}) - (X_{v,n} - X_{p,n}) \\ &= K_n(e_{o,n} + e_{p,n}) - e_{p,n} \end{aligned} \quad (1.9)$$

En utilisant (1.9), nous pouvons trouver la covariance de la valeur assimilée :

$$\begin{aligned} P_{a,n} &= \overline{e_{a,n}e_{a,n}} \\ &= \overline{[K_n(e_{o,n} + e_{p,n}) - e_{p,n}][K_n(e_{o,n} + e_{p,n}) - e_{p,n}]} \\ &= \overline{K_n(e_{o,n} + e_{p,n})K_n(e_{o,n} + e_{p,n})} - \overline{e_{p,n}K_n(e_{o,n} + e_{p,n})} \\ &\quad - \overline{e_{p,n}K_n(e_{o,n} + e_{p,n})} + \overline{e_{p,n}e_{p,n}} \\ &= K_n(R_n + P_n)K_n - P_nK_n - P_nK_n + P_n \end{aligned} \quad (1.10)$$

Nous avons assumé que $\overline{e_{p,n}e_{o,n}} = 0 = \overline{e_{o,n}e_{p,n}}$, c'est-à-dire que les erreurs du modèle et des observations ne sont pas corrélées. Pour trouver le minimum de $P_{a,n}$, sa dérivée par rapport à K_n doit être nulle (Lina, 1998) :

$$\begin{aligned} \frac{dP_{a,n}}{dK_n} &= 0 \\ 2K_n(R_n + P_n) - P_n - P_n &= 0 \\ K_n(R_n + P_n) &= P_n \\ K_n &= P_n(R_n + P_n)^{-1} \end{aligned} \quad (1.11)$$

L'équation (1.11) nous donne donc le gain de Kalman. La covariance de l'erreur de la valeur assimilée devient alors :

$$\begin{aligned} P_{a,n} &= P_n(R_n + P_n)^{-1}(R_n + P_n)P_n(R_n + P_n)^{-1} \\ &\quad - P_nP_n(R_n + P_n)^{-1} - P_nP_n(R_n + P_n)^{-1} + P_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= P_n P_n (R_n + P_n)^{-1} - P_n P_n (R_n + P_n)^{-1} - P_n P_n (R_n + P_n)^{-1} + P_n \\
&= P_n - P_n P_n (R_n + P_n)^{-1} \\
&= (1 - K_n) P_n
\end{aligned} \tag{1.12}$$

Le gain de Kalman, qui nous donne la meilleure estimation statistique, peut alors être utilisé dans (1.8) afin de déterminer la valeur assimilée (Kantha & Clayson, 2000). Les équations tiennent aussi pour un système ayant plusieurs variables d'état.

Malgré le fait qu'il soit l'estimateur à moindre carré optimal, le filtre de Kalman comporte plusieurs lacunes. Il est possible qu'il donne des résultats qui n'obéissent pas aux équations physiques à moins d'imposer des contraintes spéciales (Kantha & Clayson, 2000). Aussi le filtre de Kalman est seulement valide pour des systèmes linéaires et la statistique des erreurs nécessaire à la réalisation du filtre est généralement mal connue mais aussi très exigeante en ressources informatiques (Kantha & Clayson, 2000).

Afin de pouvoir bénéficier du filtre de Kalman pour des systèmes non-linéaires, plusieurs variantes ont été mises au point tel le filtre de Kalman étendu où la propagation de l'erreur est basée sur une linéarisation du modèle et le filtre de Kalman d'ensemble basé sur un échantillonnage Monte Carlo (Madsen & Cañizares, 1999; Lagarde, 2000). Dans le but d'éviter le lourd calcul de la covariance P_n , nous pouvons simplifier son calcul à l'aide de plusieurs approches comme le filtre RRSQRT (Reduced Rank Square Root) qui néglige les petites valeurs propres de la matrice P_n (Verlaan & Heemink, 1996; Voorrips et al., 1999) ou utiliser des schémas suboptimaux (Todling & Cohn, 1994). Enfin, l'interpolation optimale consiste à une simplification du filtre de Kalman où la covariance de l'erreur de la prédiction, P_n , reste constante avec le temps (Kantha & Clayson, 2000).

Enfin, des études portant sur l'application du filtre de Kalman en assimilation de données pour des cas en eau peu profonde ont été faites dans le passé (Budgell, 1986; Wolf et al., 2000).

1.2.2.3 Les méthodes variationnelles

Les méthodes variationnelles consistent à trouver la trajectoire des variables d'état qui minimise une fonction coût. La fonction coût est une fonction scalaire qui mesure l'écart entre la prédiction et les observations. Ceci est un problème avec contraintes puisque cette trajectoire doit satisfaire les équations physiques.

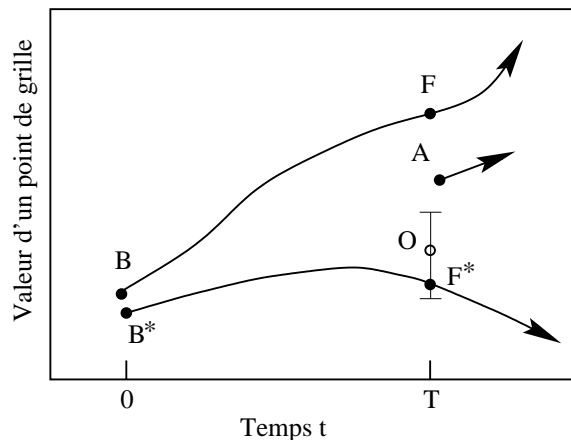


FIG. 1.4 – La méthode 4D-VAR et son principe, d’après (Errico, 1997)

Néanmoins, nous pouvons changer ce problème avec contraintes par un problème sans contraintes si, au lieu de chercher la trajectoire optimale, nous cherchons les conditions initiales qui minimisent la fonction coût. Cette manipulation est possible grâce au fait que chaque trajectoire est entièrement déterminée par les conditions initiales lesquelles peuvent être arbitraires. La procédure de minimisation va toutefois nécessiter le gradient de la fonction coût par rapport aux conditions initiales d’où le développement des équations adjointes (Talagrand & Courtier, 1987). Ces concepts de fonction coût et d’équations adjointes seront soumis à une étude plus approfondie dans les chapitres suivants.

La figure (1.4) présente un aperçu de la méthode 4D-VAR. Nous allons examiner l’évolution de la valeur d’un point de grille, par exemple, une hauteur d’eau à un endroit sur un intervalle de temps T . Le point B est une estimation de la condition initiale au temps 0. En utilisant cette condition initiale, on obtient comme prédiction le point F au temps T . Comme on peut le constater, ce point se situe bien au-delà de la barre d’erreur de l’observation O . Dans la méthode 4D-VAR, nous utilisons la différence entre la prédiction F et l’observation O , pour produire une nouvelle condition initiale B^* . Si on utilise B^* comme point de départ pour notre simulation, nous obtenons la prédiction F^* qui se trouve plus près de l’observation. Enfin, pour un temps plus grand que T , B^* donnera de meilleures prédictions que B ou que A , un point intermédiaire situé entre F et F^* (Errico, 1997). Ce qui est notable est qu’une petite erreur dans les conditions initiales peut s’amplifier énormément au cours du temps. Ceci est une caractéristique des systèmes instables (Lorenz, 1985) que nous allons couvrir plus en détail à la section (5.3). Ces diverses méthodes peuvent toutes s’avérer utiles ; il suffit de choisir celle qui

répondra le mieux au problème physique que l'on veut résoudre et des ressources numériques à notre disposition (Lorenç, 1986). Ces méthodes partagent assez de similarités (Le Dimet & Talagrand, 1986) pour que l'on tente de mettre au point une notation commune afin de mieux voir leurs liens (Ide et al., 1997). Enfin, nous pouvons trouver une liste exhaustive d'articles publiés sur les méthodes variationnelles et les filtres de Kalman dans (Courtier et al., 1993).

Il est bien de noter que même si l'assimilation de données se fait principalement en météorologie et en océanographie, les principes utilisés peuvent être appliqués dans plusieurs domaines des sciences comme la prédiction des bancs de poissons (Grønnevik & Evensen, 2001).

Enfin, l'assimilation de données est promise à un bel avenir en physique expérimentale. L'assimilation de données présente un avantage sur les méthodes d'inversion notamment l'inversion électromagnétique parce qu'elle inclue également le temps. L'idée d'utiliser ces techniques a récemment été avancée par (Egbert, 2002). Nous allons proposer une application de l'assimilation de données pour les méthodes d'imagerie électrique dans l'annexe C.

1.3 Présentation du travail

Dans le présent chapitre (ch. 1), nous avons donné un aperçu des différentes méthodes d'assimilation de données qui s'offrent à nous. Nous allons ensuite nous attarder sur la formulation du problème d'assimilation de données sous la forme d'un problème de minimisation sans contraintes (ch. 2) avant de dériver à partir de principes premiers, les équations en eaux peu profondes ainsi que leurs adjointes (ch. 3). Le chapitre 4 présente la discrétisation des équations physiques qui a servi à la résolution numérique de ces équations. Les résultats obtenus dans deux cas de contournement de barrage seront discutés au chapitre 5. Finalement, des conclusions seront tirées dans le chapitre 6 ainsi que les perspectives sur le travail qui reste à faire. En annexe, nous présenterons une application de la méthode 4D-VAR à l'équation de Burgers (annexe A). Comme il nous a été demandé, nous ajoutons les équations adjointes pour un panache thermique (annexe B) et une suggestion de la marche à suivre pour transformer un problème d'inversion électrique à un problème d'assimilation de données (annexe C). La dernière annexe (annexe D) explique quelques directives pour la vectorisation du code numérique dans le but d'augmenter sa vitesse d'exécution.

1.4 Les objectifs de ce travail

Premièrement, ce travail s'inscrit dans le projet *Nowcasting* qui s'intéresse à la prédiction météorologique à court terme et à la prise de décision en temps réel. Cette maîtrise a été financée par le projet *Nowcasting* pour l'étude de la prédiction des inondations catastrophiques.

Deuxièmement, les techniques d'assimilation de données sont universelles en physique et permettront de relier les données des expériences aux simulations numériques de façon auto-consistante. Nous voulons faire connaître ces méthodes prometteuses auprès de la communauté des Physiciens. Ce document a donc aussi un intérêt pédagogique.

1.5 Contributions originales

Les contributions originales apportées par ce travail de Maîtrise sont :

1. La mise au point de la méthode 4D-VAR pour l'écoulement en eaux peu profondes avec sédiments.
2. L'application de la méthode 4D-VAR à la prédiction du débordement de la rivière Chicoutimi.
3. L'estimation de la prévisibilité de l'écoulement en eaux peu profondes.
4. L'écriture de l'algorithme 4D-VAR pour la convection d'un panache thermique.

Les résultats ont été communiqués et publiés dans les *proceedings* de la conférence CFD2002 :

Bélangier, E., Vincent, A., Fortin, A., 2002, "Data Assimilation (4D-VAR) for Shallow-Water Flow : The Case of the Chicoutimi River", Proceedings of the 10th Annual Conference of the CFD Society of Canada, "CFD 2002", University of Windsor, Windsor, June 9–11 2002.

une publication plus complète est en préparation :

Bélangier, E., Vincent, A., 2002, "Data assimilation (4D-VAR) to forecast flood in shallow waters with sediment erosion", to be submitted to the Int. Journal Num. Meth. in Fluids, Aug. 2002.

Nous avons également communiqué nos résultats à ACFAS 2002 :

Bélanger, E., Vincent, A., Fortin, A., 2002, "Assimilation de données (4D-VAR) pour l'écoulement en eau peu profonde : le cas de la rivière des Ha ! Ha !", 70^e Congrès de l'Acfas, "Science et Savoir", Université Laval, Québec, du 13 au 17 mai 2002, présenté le 14 mai 2002.

et enfin, un rapport technique sur l'applicabilité de la méthode 4D-VAR à l'équation de Burgers, à la convection thermique et à la prospection électrique :

Bélanger, E., Vincent, A., 2002, "Assimilation de données (4D-VAR) pour l'équation de Burgers, la convection thermique et la prospection électrique", Rapport Technique CERCA, 12 août 2002, R2002-77.

Chapitre 2

Formulation lagrangienne de la méthode 4D-VAR

Lagrange a mis au point la règle des multiplicateurs en généralisant un théorème de Fermat (1629) dans le but de résoudre des problèmes d'optimisation avec contraintes sous la forme d'une égalité (Jahn, 1996).

Considérons que nous voulons minimiser la fonction $f(y, z; x)$ où x est la variable indépendante ($y = y(x)$ et $z = z(x)$) avec la contrainte $g(y, z; x)$. Pour trouver le minimum de $f(y, z; x)$, nous trouvons sa variation. L'opérateur variationnel δ sert à décrire le comportement d'une fonction près d'un point quelconque à l'aide d'un déplacement virtuel \vec{r} (Daley, 1991). Cet opérateur est similaire à l'opérateur différentiel d sauf que ce dernier utilise un déplacement réel (Daley, 1991). Nous avons donc :

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \delta z. \quad (2.1)$$

La variation de la contrainte $g(y, z; x)$ est quant à elle :

$$\delta g = \frac{\partial g}{\partial y} \delta y + \frac{\partial g}{\partial z} \delta z \quad (2.2)$$

Comme (2.2) est généralement égale à 0, nous avons :

$$\frac{\partial g}{\partial y} \delta y = -\frac{\partial g}{\partial z} \delta z. \quad (2.3)$$

Si on isole δy dans (2.1), nous obtenons :

$$\delta f = \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial z} \left(\frac{\partial g / \partial y}{\partial g / \partial z} \right) \right) \delta y \quad (2.4)$$

où nous avons substitué δz par (2.3). Nous sommes à un minimum si le contenu de la parenthèse de (2.4) est nul :

$$\frac{\partial f}{\partial y} \left(\frac{\partial g}{\partial y} \right)^{-1} = \frac{\partial f}{\partial z} \left(\frac{\partial g}{\partial z} \right)^{-1} \quad (2.5)$$

Puisque dans (2.5) nous avons des dérivées de f et de g par rapport à y à gauche et des dérivées par rapport à z à droite, nous pouvons dire que les deux côtés de l'égalité sont des fonctions de x (y et z sont des fonctions de x) que nous allons écrire $-\lambda(x)$. Nous pouvons donc réécrire (2.5) :

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda(x) \frac{\partial g}{\partial y} = 0 \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} + \lambda(x) \frac{\partial g}{\partial z} = 0 \quad (2.7)$$

où $\lambda(x)$ est connu comme un multiplicateur de Lagrange (Marion & Thornton, 1988).

2.1 La fonction coût

Lorsqu'on utilise une méthode variationnelle, il faut écrire le problème comme une fonctionnelle ou fonction coût que l'on cherchera à minimiser. La forme générale de la fonction coût est :

$$J = \int_0^T \int_{\Omega} f(\vec{\Psi}, \vec{x}, t) d\vec{x} dt \quad (2.8)$$

où $f(\vec{\Psi}, \vec{x}, t)$ est une fonction scalaire définie sur un domaine Ω et un intervalle de temps $[0, T]$ (Sanders & Katopodes, 2000). $f(\vec{\Psi}, \vec{x}, t)$ est une fonction de $\vec{\Psi}$ qui représente les variables d'état (variables physiques comme par exemple la vitesse ou la hauteur d'eau en hydrologie), ainsi que de la position et du temps. Selon le problème à résoudre, nous choisissons une fonction $f(\vec{\Psi}, \vec{x}, t)$ appropriée.

2.1.1 Application en assimilation de données

En assimilation de données, utilisée notamment dans les différentes branches de la physique du globe (météorologie, océanographie, dynamique des fluides géophysiques, ...), nous sommes intéressés à minimiser l'erreur entre la prédic-

tion et les observations (Talagrand & Courtier, 1987). La prédiction est faite à partir de la résolution des équations physiques :

$$\mathcal{E}(\vec{\Psi}, \vec{x}, t) = 0 \quad (2.9)$$

modélisant le processus concerné. Quant aux observations, elles seront représentées par :

$$\vec{\Psi}^0 = \mathbf{H}\vec{\Psi} + \vec{\varepsilon} \quad (2.10)$$

où \mathbf{H} est l'opérateur d'observation qui relie les variables du modèle aux variables des observations. Par exemple, \mathbf{H} peut être une interpolation temps-espace pour porter les observations sur une grille de calcul sur laquelle on fera la simulation numérique (voir ch. 3, 4, 5) ou, si les quantités observées sont des fonctions des quantités du modèle numérique, \mathbf{H} représente une linéarisation du lien physique ou statistique entre eux (Talagrand, 1997). $\vec{\varepsilon}$ est l'erreur des observations de source instrumentale ou autre. Cette erreur est inconnue mais ses propriétés statistiques sont connues. On fait l'hypothèse qu'elle est non biaisée :

$$\overline{\vec{\varepsilon}} = 0 \quad (2.11)$$

et que sa covariance est connue :

$$\overline{\vec{\varepsilon}\vec{\varepsilon}^T} = \mathbf{R} \quad (2.12)$$

où \mathbf{R} est la matrice de covariance (Courtier, 1997). Quelques techniques de mesures expérimentales ainsi que leurs applications sont abordées par (ASME, 2002) dans les sections "Experimental and Numerical Flow Visualization and Laser Anemometry" et "Fluid Measurements and Instrumentation".

Voici la fonction coût utilisée :

$$J(\vec{\Psi}) = \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} (\mathbf{H}\vec{\Psi} - \vec{\Psi}^0)^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{H}\vec{\Psi} - \vec{\Psi}^0) d\vec{x} dt. \quad (2.13)$$

La fonction coût est tout simplement le carré de l'erreur entre la prédiction et les observations avec l'inverse de la covariance \mathbf{R} des observations utilisée comme un poids statistique.

Plus particulièrement, nous allons seulement considérer la hauteur d'eau pour la fonction coût parce que cette quantité est facilement mesurable et qu'elle est

importante dans les débordements de rivières. Nous avons alors :

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (h(T)_i - h_i^{\text{obs}}) \mathbf{R}^{-1} (h(T)_i - h_i^{\text{obs}}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N E(h)_i \mathbf{R}^{-1} E(h)_i. \end{aligned} \quad (2.14)$$

L'équation (2.14) est alors le carré de l'erreur entre la prédiction de la hauteur d'eau et son observation. Nous prenons le carré puisque c'est l'amplitude de l'erreur qui nous intéresse et que, contrairement à la valeur absolue, une fonction quadratique est partout dérivable. La matrice \mathbf{R}^{-1} sert à accorder plus d'importance aux observations prises avec des instruments plus précis. Nous avons remplacé l'intégrale par une somme puisque nous allons discrétiser le problème physique. Nous additionnons l'erreur $E(h)$ pour les N points sur la grille de calcul, ainsi cette fonction coût est une fonction de N variables. Dans nos expériences (ch. 5), nous avons pris $(\mathbf{R}_{i,j})^{-1} = 1$, donc tous les points ont le même poids.

2.1.2 Application en contrôle optimal

D'un autre côté, la fonction coût joue également un rôle en contrôle optimal. Nous allons passer en revue trois exemples d'application du contrôle optimal.

2.1.2.1 Écoulement autour d'une aile d'avion

Le contrôle optimal est utilisé par l'industrie aéronautique dans la conception de profils d'aile d'avion. La forme des profils d'aile d'avion est déterminée avec une fonction :

$$f(x) = \sum_i \alpha_i b_i(x) \quad (2.15)$$

où les α_i sont des poids (variables de contrôle) que l'on choisit pour obtenir le profil désiré et les $b_i(x)$ sont des fonctions de formes (hyperboles, fonctions trigonométrique, polynômes). Ce qu'on veut minimiser est principalement la friction de l'air sur l'aile. Généralement, on utilise comme fonction coût le coefficient de traînée C_D (Nadarajah & Jameson, 2000). Le coefficient de traînée est défini comme étant le rapport de la force de traînée sur le taux de perte d'énergie cinétique, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}
 J &= C_D \\
 &= \frac{f_D}{\frac{1}{2}\rho v^2}
 \end{aligned}
 \tag{2.16}$$

où ρ et v sont la densité et la vitesse du fluide, respectivement. La force f_D est la somme des contraintes exercées par le fluide sur l'aile.

2.1.2.2 Écoulement au-dessus d'une plaque

Lorsqu'un fluide circule au-dessus d'une plaque, des instabilités peuvent se créer dans la couche limite sous certaines conditions. Un de ces mécanismes, l'instabilité algébrique, est dû à un vortex longitudinal qui repousse le fluide de basse vitesse près de la plaque pour le remplacer par du fluide de haute vitesse. Ce phénomène cause en aval une amplification d'une perturbation située en amont (Zuccher & Luchini, 2002). Ici, le contrôle optimal sert à déterminer la perturbation initiale qui maximisera le gain à la sortie. Donc, nous voulons maximiser la fonction coût :

$$J = G_o = \frac{E_o}{E_i} \tag{2.17}$$

où E_i est l'énergie initiale et E_o est l'énergie à la sortie (Zuccher & Luchini, 2002).

2.1.2.3 Écoulement autour d'un cylindre

Considérons un cylindre dans un fluide en écoulement. Lorsque le fluide atteint une certaine vitesse, des vortex se forment derrière le cylindre : ce sont des allées de von Kármán (Tritton, 1988). Si le fluide est un conducteur, comme l'eau salée, nous pouvons utiliser la force de Lorentz pour régulariser le flot derrière le cylindre en plaçant des électrodes et des aimants sur la surface de celui-ci (Sun & Aubry, 2002).

Nous sommes intéressé à trouver la magnitude et la région d'influence de la force de Lorentz qui minimisera la fonction coût suivante :

$$J = \frac{1}{(\frac{1}{2}\rho U_\infty^2)^2} \int_0^{2\pi} (p(N, \beta, \theta) - p^{pot}(\theta))^2|_{r=b} d\theta \tag{2.18}$$

où ρ est la densité du fluide, U_∞ est la vitesse du fluide à l'entrée, $p(N, \beta, \theta)$ est la pression actuelle du fluide (visqueux) et $p^{pot}(\theta)$ est la pression dû à un écoulement

potentiel. Les pressions sont évaluées sur la surface du cylindre ($r = b$) et N, β sont des paramètres que l'on modifiera pour trouver le minimum. Cette fonction coût assume que lorsque l'on aura un écoulement potentiel autour du cylindre, les vortex disparaîtront (Sun & Aubry, 2002).

2.1.3 Application : *Deep Blue*

Finalelement, afin de démontrer la généralité de cette approche, les programmes d'ordinateur qui sont capables de jouer aux échecs, tel *Deep Blue*, déterminent parmi les nombreux coups possibles celui qui placera le jeu dans la position la plus favorable pour remporter la partie. Le tout est fait à partir de l'évaluation de fonctions spécialisées (Bewley, 2001). Bref, la résolution de problèmes en minimisant une fonction coût peut survenir dans plusieurs domaines variés.

2.2 Les méthodes variationnelles

2.2.1 La minimisation avec contraintes

Suite à la définition de la fonction coût, nous pouvons établir l'objectif de la méthode 4D-VAR. Nous voulons trouver la trajectoire du champ $\vec{\Psi}$ qui minimisera la fonction coût (équ. 2.13) tout en obéissant aux équations physiques (équ. 2.9) qui agissent à titre de contraintes. Ce problème est un problème de minimisation avec contraintes (Talagrand & Courtier, 1987).

Habituellement, afin de résoudre un problème avec contraintes, on utilise le lagrangien. La formulation par multiplicateurs indéterminés de Lagrange nécessite la construction du lagrangien du système que l'on veut étudier :

$$\mathcal{L}(\vec{\Psi}, \vec{\lambda}) = J(\vec{\Psi}) + \int_0^T \int_{\Omega} \vec{\lambda}(\vec{x}, t) \cdot \mathcal{E}(\vec{\Psi}, \vec{x}, t) d\vec{x} dt \quad (2.19)$$

où $J(\vec{\Psi})$ est la fonction coût et $\vec{\lambda}(\vec{x}, t)$ sont les multiplicateurs indéterminés de Lagrange aussi appelés variables adjointes (Sanders & Katopodes, 1999). Il a été démontré que trouver les points stationnaires de la fonction coût sous la contrainte $\mathcal{E}(\vec{\Psi}, \vec{x}, t) = 0$ est équivalent à trouver les points stationnaires du lagrangien par rapport aux variables $\vec{\Psi}$ et $\vec{\lambda}$ (Le Dimet & Talagrand, 1986).

Puisque nous devons minimiser le lagrangien, nous devons trouver ses points stationnaires qui ne sont pas des minima ou maxima absolus mais plutôt des points

de selle (Le Dimet & Talagrand, 1986). Pour accomplir cette tâche, nous appliquons l'opérateur variationnel δ au lagrangien. Ici, les directions de déplacement sont les variables physique du système ainsi que les variables adjointes. En prenant la variation du lagrangien, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L} &= \vec{\nabla}_{\vec{\Psi}}\mathcal{L}\cdot\delta\vec{\Psi} + \vec{\nabla}_{\vec{\lambda}}\mathcal{L}\cdot\delta\vec{\lambda} \\ &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\vec{\Psi}}\delta\vec{\Psi} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\vec{\lambda}}\delta\vec{\lambda}\end{aligned}\quad (2.20)$$

Il faut noter que du même coup, nous avons linéarisé notre problème. Cette linéarisation entraîne une augmentation de termes dans les équations adjointes puisque la dérivée de chaque terme non-linéaire (quadratique) produit deux termes (Ehrendorfer, 1992). Cela rend la programmation des équations adjointes plus ardue.

Pour un déplacement $(\delta\vec{\Psi}, \delta\vec{\lambda})$ arbitraire, nous sommes à un minimum seulement si $\delta\mathcal{L} = 0$ (Daley, 1991). Cela indique que la dérivée du lagrangien par rapport à chaque direction doit être nulle :

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\vec{\lambda}} = \mathcal{E}(\vec{\Psi}, \vec{x}, t) = 0 \quad (2.21)$$

et

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\vec{\Psi}} = \text{Adj}(\vec{\lambda}) + \frac{\partial J}{\partial\vec{\Psi}} = 0 \quad (2.22)$$

où $\text{Adj}(\vec{\lambda})$ représente les équations adjointes après intégration par parties (Wenzel, 2001). Notons que (2.21) est le système d'équations que l'on avait au départ. Enfin, (2.21) et (2.22) sont les équations d'Euler-Lagrange ainsi qu'il a été noté par Le Dimet et Talagrand (1986).

2.2.2 La minimisation sans contraintes

Malheureusement, il n'existe pas de moyen efficace pour résoudre directement les équations d'Euler-Lagrange. Cette situation nous pousse à reformuler notre problème sous forme de problème sans contraintes (Talagrand & Courtier, 1987). Puisque les équations physiques du modèle sont déterministes, il est évident que l'état du système aux temps des observations dépend seulement des conditions initiales $\vec{\Psi}_0$ du système. Cela met en évidence le fait que la fonction coût est une fonction implicite des conditions initiales car c'est en variant les conditions initiales que nous allons trouver la solution des équations physiques qui va minimiser

la fonction coût (Ehrendorfer, 1992). Selon la théorie du contrôle optimal (Lions, 1968), les variables de contrôle du problème sont les conditions initiales. On peut aussi utiliser les conditions aux frontières comme variables de contrôle (Wenzel, 2001). Dans notre problème, nous avons enlevé les contraintes puisqu'aucune restriction n'est appliquée sur les conditions initiales.

Afin d'être capable de minimiser le coût (Section 4.4), nous avons besoin du gradient de la fonction coût par rapport aux conditions initiales. Or, il n'est pas possible de trouver le gradient approprié de façon analytique parce que la fonction coût est avant tout une fonction explicite des prédictions. Il se trouve que le moyen le plus efficace pour calculer le gradient de la fonction coût par rapport aux conditions initiales ($\vec{\nabla}_{\vec{\Psi}_0} J$) est d'utiliser les équations adjointes (Courtier & Talagrand, 1990).

Il est possible en effet de réécrire la fonction coût définie en (2.13) comme :

$$J = \frac{1}{2} \langle \mathbf{H}\vec{\Psi} - \vec{\Psi}^0, \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{H}\vec{\Psi} - \vec{\Psi}^0) \rangle \quad (2.23)$$

en utilisant le produit scalaire $\langle \vec{X}, \vec{Y} \rangle$ de deux vecteurs \vec{X} et \vec{Y} qui est défini comme suit (Bewley, 2001; Bewley et al., 2001) :

$$\langle \vec{X}, \vec{Y} \rangle = \int_0^T \int_{\Omega} \vec{X}^T \vec{Y} \, d\vec{x} \, dt \quad (2.24)$$

où Ω et $[0, T]$ sont le domaine et l'intervalle de temps considérés, respectivement. En prenant la variation de premier ordre de la fonction coût :

$$\delta J = \langle \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{H}\vec{\Psi} - \vec{\Psi}^0), \delta\vec{\Psi} \rangle. \quad (2.25)$$

Avant de procéder, nous allons trouver le modèle linéaire tangent de notre système. Nous pouvons réécrire $\mathcal{E}(\vec{\Psi}, \vec{x}, t) = 0$ sous forme d'une dérivée en temps :

$$\frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial t} = F(\vec{\Psi}). \quad (2.26)$$

Le modèle linéaire tangent qui décrit l'évolution temporelle d'une perturbation dans les paramètres tels que les conditions initiales, est donné par :

$$\frac{\partial \delta\vec{\Psi}}{\partial t} = \frac{DF}{D\vec{\Psi}} \delta\vec{\Psi} \quad (2.27)$$

où $\frac{DF}{D\vec{\Psi}}$ est la matrice jacobienne contenant les dérivées de F par rapport à $\vec{\Psi}$ évaluées à un état initial $\vec{\Psi}_0$ (Talagrand, 1981). On l'appelle ainsi car il utilise une approximation linéaire et les coefficients du modèle linéaire sont les pentes des tangentes du modèle non-linéaire. On utilise le modèle linéaire tangent afin d'étudier la progression de l'erreur entre deux solutions ; une ayant été perturbée originalement (Errico et al., 1993). Puisque (2.27) dépend linéairement des conditions initiales, nous pouvons l'écrire comme :

$$\delta\vec{\Psi} = L\delta\vec{\Psi}_0 \quad (2.28)$$

où L est la résolvante. Nous pouvons substituer $\delta\vec{\Psi}$ dans (2.25) par (2.28) pour obtenir :

$$\delta J = \langle \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{H}\vec{\Psi} - \vec{\Psi}^0), L\delta\vec{\Psi}_0 \rangle \quad (2.29)$$

Selon la théorie des espaces de Hilbert (Talagrand & Courtier, 1987), tout opérateur linéaire L est relié à un opérateur adjoint, L^* , qui est linéaire. L^* obéit à la propriété :

$$\langle \vec{Y}, L\vec{X} \rangle = \langle L^*\vec{Y}, \vec{X} \rangle \quad (2.30)$$

pour tout produit scalaire et vecteurs \vec{X}, \vec{Y} (Le Dimet & Talagrand, 1986).

Nous pouvons écrire l'équation adjointe :

$$-\frac{\partial\delta\vec{\Psi}^*}{\partial t} = \frac{DF}{D\vec{\Psi}}^* \delta\vec{\Psi}^* \quad (2.31)$$

puis

$$\delta\vec{\Psi}_0 = L^*\delta\vec{\Psi} \quad (2.32)$$

où L^* est l'adjoint de L . Le modèle adjoint mesure alors la sensibilité d'un système vis-à-vis certains paramètres comme les conditions initiales (Hall & Cacuci, 1983). Cela dit, il faut noter que les variables adjointes ne représentent pas des champs réels mais les dérivées de la fonction coût par rapport aux conditions initiales (Talagrand & Courtier, 1987).

Une expression pour l'adjoint L^* peut être obtenue à partir du modèle linéaire tangent en utilisant l'intégration par parties afin de passer les dérivées de la variable réelle $\vec{\Psi}$ à la variable adjointe $\vec{\Psi}^*$ (Bewley, 2001; Bewley et al., 2001) :

$$\begin{aligned}
& \langle \vec{Y}, L\vec{X} \rangle \\
&= \int_0^T \int_{\Omega} \vec{Y}^T L\vec{X} \, d\vec{x} \, dt \\
&= \int_0^T \int_{\Omega} L^* \vec{Y}^T \vec{X} \, d\vec{x} \, dt + b \\
&= \langle L^* \vec{Y}, \vec{X} \rangle.
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Le terme b vient de l'intégration par parties. En exigeant que $b = 0$, nous obtenons l'équation (2.30). Ceci dit, nous pouvons remplacer le modèle linéaire tangent par son adjoint dans (2.29) :

$$\delta J = \langle L^*(\mathbf{H}\vec{\Psi} - \vec{\Psi}^0_t), \delta\vec{\Psi}_0 \rangle. \tag{2.34}$$

Puisque la variation de J peut être écrite comme (RPN, 2001) :

$$\begin{aligned}
\delta J &= J(\Psi_0 + \delta\Psi_0) - J(\Psi_0) \\
&= \langle \nabla J(\Psi_0), \delta\Psi_0 \rangle + \text{termes non-linéaires},
\end{aligned} \tag{2.35}$$

le gradient de la fonction coût est alors donné par :

$$\nabla J = L^* \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{H}\vec{\Psi} - \vec{\Psi}^0). \tag{2.36}$$

À partir de (2.31), nous pouvons écrire l'équation adjointe non homogène (Talagrand & Courtier, 1987) :

$$-\frac{\partial \delta\vec{\Psi}^*}{\partial t} = \frac{DF^*}{D\vec{\Psi}} \delta\vec{\Psi}^* + \vec{\nabla}_{\vec{\Psi}} J(\vec{\Psi}) \tag{2.37}$$

qui est équivalente à (2.22). Finalement, le gradient de la fonction coût par rapport aux conditions initiales est déterminé par la valeurs des variables adjointes après avoir résolu (2.22), soit les équations adjointes non homogènes (Courtier & Talagrand, 1990).

Chapitre 3

Modélisation physique de l'écoulement en eaux peu profondes

3.1 Niveaux de référence

Les équations en eaux peu profondes nécessitent la définition de niveaux de référence (fig. 3.1). Z est la hauteur totale mesurée de la surface de l'eau au niveau de référence (datum). Il s'agit d'une hauteur de référence que nous choisissons comme le niveau de la mer par exemple. La hauteur d'eau est donnée par h . Z_b est la hauteur de la bathymétrie mobile composée de sédiments. Les sédiments sont le sable et la vase qui reposent au fond des rivières. Z_s est la hauteur de la bathymétrie solide ou roc. L'épaisseur de la couche de sédiments est donnée par $Z_b - Z_s$.

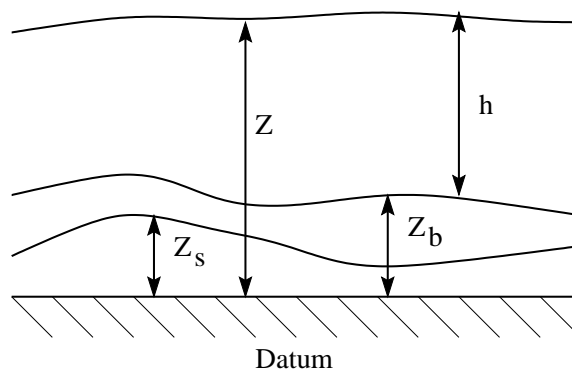


FIG. 3.1 – Les différents niveaux de référence utilisés dans les équations de Saint-Venant

3.2 Dérivation des équations de Saint-Venant

3.2.1 Conservation de la masse

On divise le fluide en volumes élémentaires (fig. 3.2) et on applique la conservation de la masse dans ce volume quelconque :

$$\begin{aligned} \text{changement de masse dans le volume} &= \text{flux de masse dans le volume} \\ &- \text{flux de masse hors du volume} \\ &+ \text{création de masse} \\ &- \text{destruction de masse.} \end{aligned}$$

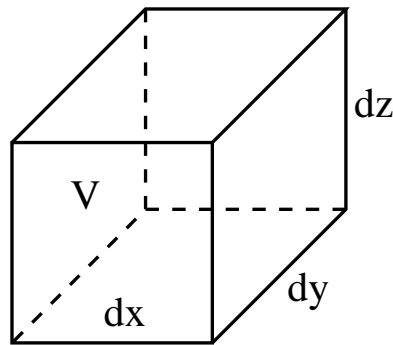


FIG. 3.2 – Volume élémentaire V de fluide

Comme il n'y a aucune réaction chimique à l'intérieur du volume, les termes de création et de destruction sont nulles. Mathématiquement, nous avons :

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_S \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (3.1)$$

où $S = \partial V$ est la surface autour du volume élémentaire V . Le second terme, qui représente le flux net, peut être réécrit en utilisant le théorème de Green :

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_V \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) dV = 0 \quad (3.2)$$

Nous pouvons rassembler les termes sous une seule intégrale :

$$\int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) \right) dV = 0 \quad (3.3)$$

Si les volumes sont tous égaux avec une densité non constante, nous pouvons changer l'équation intégrale en équation différentielle :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (3.4)$$

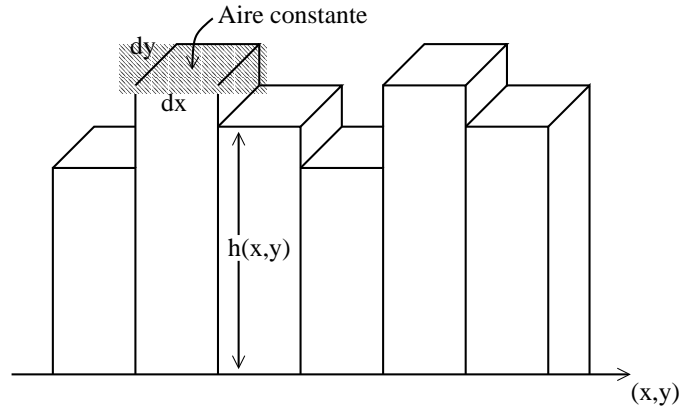


FIG. 3.3 – Colonnes d’eau qui se déplacent

Cette équation est l’équation de continuité de Navier-Stokes (1845). En ce qui a trait aux équations de Saint-Venant, les volumes élémentaires sont représentés par des colonnes d’eau qui se déplacent (fig. 3.3).

Cette représentation nécessite l’utilisation d’éléments de volume différents mais en gardant la densité constante, nous avons :

$$\frac{\partial(\rho h A)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{v} \rho h A) = 0 \quad (3.5)$$

En éliminant l’aire, A , et la densité puisqu’elles sont constantes, on obtient :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (h \vec{v}) = 0 \quad (3.6)$$

3.2.2 Conservation de la quantité de mouvement

Le taux de changement de la quantité de moment d’un volume de fluide est égal à la somme des forces exercées sur celui-ci :

$$\frac{D\rho \vec{v}}{Dt} = \sum_i \vec{F}_i \quad (3.7)$$

où $\frac{D}{Dt}$ est la dérivée lagrangienne (Tritton, 1988). Si on utilise la définition de la dérivée lagrangienne, nous nous retrouvons avec cette équation :

$$\frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v} \vec{v}) = \sum_i \vec{F}_i. \quad (3.8)$$

En imposant un gradient de pression ainsi qu'une force visqueuse, nous pouvons écrire la somme des forces explicitement :

$$\frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v} \vec{v}) = -\vec{\nabla} P + \nu \nabla^2 \vec{v}. \quad (3.9)$$

Nous obtenons ainsi l'équation de Navier-Stokes si les volumes sont tous égaux. Dans le cas des équations de Saint-Venant, la densité est constante mais pas le volume élémentaire lequel est remplacé par la hauteur de la colonne d'eau h . On écrit alors :

$$\frac{\partial h \vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (h \vec{v} \vec{v}) = -\vec{\nabla} P + \nu \nabla^2 \vec{v}. \quad (3.10)$$

Puisque nous considérons la colonne d'eau, nous faisons l'approximation dite hydrostatique : la pression est seulement due au poids de la colonne d'eau. On peut donc écrire la pression comme étant :

$$P = -\rho g h = -h^2 g \quad (3.11)$$

pour obtenir

$$\frac{\partial h \vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (h \vec{v} \vec{v}) = g \vec{\nabla} h^2 + \frac{\tau_u}{\rho} \quad (3.12)$$

où nous avons remplacé le terme de viscosité du fluide ($\nu \sim 10^{-6} \text{m}^2/\text{s}$ pour l'eau à 20 °C) par un terme de cisaillement au niveau du lit. Nous allons expliquer dans la prochaine section comment modéliser ce terme de cisaillement.

3.2.2.1 Le cisaillement du lit

L'équation (3.12) s'écrit en une dimension d'espace x :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + g \frac{\partial Z}{\partial x} + \frac{\tau_u}{\rho} = 0 \quad (3.13)$$

où τ_u est la contrainte de cisaillement du lit qui représente la force de frottement par unité de surface due à la rugosité du fond (Zhou & Stansby, 1999). Elle est exprimée en utilisant la vitesse horizontale moyenne et s'écrit :

$$\tau_u = C_b \rho V^2 \quad (3.14)$$

où C_b est un coefficient de friction de l'écoulement au niveau du lit (sans dimension) et V est la vitesse moyenne. Notons que (3.14) assume que la contrainte de

cisaillement est proportionnel à l'énergie cinétique du fluide. Si cette contrainte, τ_u , agit sur un périmètre mouillé P et une longueur de canal X , la force de traînée turbulente F_u s'écrit :

$$F_u = \tau_u PX = C_b \rho V^2 PX. \quad (3.15)$$

Dans un système en équilibre, cette force de traînée, F_u , doit être égale à la force, F_d , due au poids effectif de l'eau (Dingman, 1984) :

$$F_d = \rho g AX \sin(\theta) \quad (3.16)$$

où A est l'aire d'une section transversale et θ est la pente du fond. En égalant (3.15) et (3.16), nous obtenons :

$$\begin{aligned} F_u &= F_d \\ C_b \rho V^2 PX &= \rho g AX \sin(\theta) \\ V &= \left(\frac{gA \sin(\theta)}{C_b P} \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Nous pouvons simplifier l'expression de la vitesse en définissant le rayon hydraulique $R = A/P$ et en remplaçant $\sin(\theta)$ par S_0 :

$$V = \left(\frac{gRS_0}{C_b} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.18)$$

Le coefficient de Chézy, C_z , est défini par :

$$C_z = \left(\frac{g}{C_b} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.19)$$

En substituant (3.19) dans (3.18), nous obtenons :

$$V = C_z R^{\frac{1}{2}} S_0^{\frac{1}{2}} \quad (3.20)$$

qui est l'équation de Chézy (Dingman, 1984). Ici, C_z a des dimensions de $[L^{\frac{1}{2}} T^{-1}]$ mais généralement, on le traite comme étant sans dimension en écrivant :

$$V = u_c C_z R^{\frac{1}{2}} S_0^{\frac{1}{2}} \quad (3.21)$$

où u_c prend en compte les unités (Dingman, 1984). Dans la pratique, on préfère l'expression trouvée expérimentalement par Manning :

$$V = u_m \left(\frac{1}{n} \right) R^{\frac{2}{3}} S_0^{\frac{1}{2}} \quad (3.22)$$

où n est le coefficient de rugosité de Manning et u_m remplit les mêmes fonctions que u_c puisque le coefficient de Manning est généralement considéré comme étant un nombre sans dimension. Le coefficient de Chézy peut être relié avec le coefficient de Manning à l'aide de la relation suivante (Zhou & Stansby, 1999) :

$$C_z = \frac{h^{\frac{1}{6}}}{n}. \quad (3.23)$$

Le coefficient de Manning a donc des dimensions de $[L^{-\frac{1}{3}}T]$ ¹. Nous pouvons donc réécrire (3.13) :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + g \frac{\partial Z}{\partial x} + \frac{g v^2 n^2}{h^{\frac{4}{3}}} = 0. \quad (3.24)$$

3.2.3 Les équations originelles de Saint-Venant

Voici les équations telles qu'obtenues par Saint-Venant (1871) :

$$\frac{dh}{dt} + \frac{d(hv)}{dx} = 0 \quad (3.25)$$

et

$$\frac{dv}{dt} + v \frac{dv}{dx} - g \frac{d\zeta}{dx} + \frac{PF}{h \rho} = 0 \quad (3.26)$$

où ζ est la distance entre la surface de l'eau et un niveau de référence situé au-dessus de l'eau comparativement à la figure (3.1) où ce niveau est situé au-dessous du lit de la rivière. Ceci explique la présence du signe négatif devant le terme. Le dernier terme de (3.26) représente le frottement du fond de la rivière. Dans notre cas, nous avons modélisé ce terme par le terme de Manning. Nos équations en eaux peu profondes correspondent aux équations originelles (Saint-Venant, 1871).

¹Une discussion au sujet des unités du terme de Manning se trouve à la section 5-6 dans (Chow, 1959).

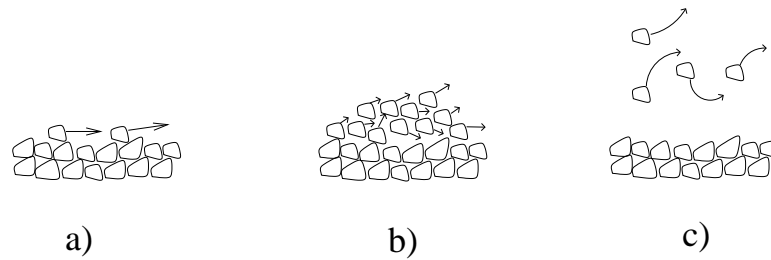


FIG. 3.4 – Modes de transport des sédiments d’après (Fredsoe & Deigaard, 1992) : a) transport à petites forces de cisaillement, b) transport en couche, c) sédiments en suspension

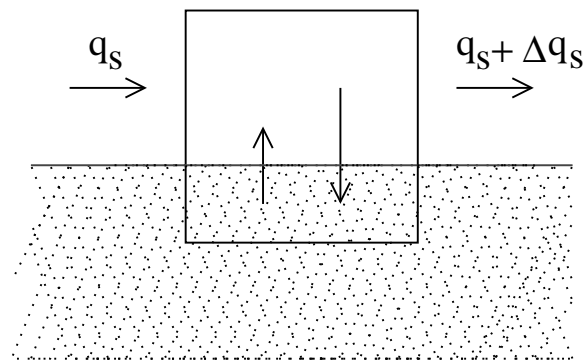


FIG. 3.5 – Conservation du débit de sédiments, d’après (Chanson, 1999)

3.2.4 Conservation de la masse pour les sédiments

Maintenant, nous allons écrire l’équation de continuité pour les sédiments. Le flux de sédiments q_s est donné par :

$$q_s = q_{sl} + q_{ss} \quad (3.27)$$

où q_{sl} est le flux de sédiments charriés au niveau du lit et q_{ss} est le flux de sédiments en suspension (Yalin, 1992). La distinction entre ces deux flux est due à la façon dont les sédiments se déplacent : le flux de lit voyage au-dessus du fond marin et les collisions inter-particulaires sont dominantes (fig. 3.4b) tandis que la turbulence du fluide est dominante dans le flux en suspension (fig. 3.4c). Lorsque le cisaillement est très faible, le sédiment ne se déplace pas en couche ; seules quelques particules roulent sur le fond marin (fig. 3.4a) (Fredsoe & Deigaard, 1992).

En prenant un petit volume de contrôle (fig. 3.5), les lois de conservation exigent que le flux de sédiments à travers ce volume soit égal à la variation de la hauteur du fond marin.

La quantité physique pertinente est alors C_s la concentration de sédiments en suspension dans un petit volume élémentaire. On peut alors écrire l'équation de transport de la concentration de sédiments :

$$\frac{\partial C_s}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} C_s = p \frac{\partial(Z_b - Z_s)}{\partial t} - \frac{\partial(Z_b - Z_s)}{\partial t} \quad (3.28)$$

Le terme $p \frac{\partial(Z_b - Z_s)}{\partial t}$ est un terme de création de la concentration de sédiments venant des sédiments arrachés du lit où $Z_b - Z_s$ est l'épaisseur de la couche de sédiments. Ce terme est proportionnel à la porosité puisqu'avec une porosité plus élevée, l'eau a plus de facilité pour s'infiltrer dans le lit et soulever le sédiment. Cela crée un changement dans la hauteur du lit. Le terme $\frac{\partial(Z_b - Z_s)}{\partial t}$ est un terme de destruction de la concentration de sédiments. Ce terme est dû aux sédiments en suspension qui se déposent sur le lit.

En utilisant une identité vectorielle, nous pouvons réécrire l'advection de la concentration :

$$\vec{\nabla} \cdot (C_s \vec{v}) = \vec{v} \cdot \vec{\nabla} C_s + C_s (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}). \quad (3.29)$$

Puisque nous utilisons l'approximation du fluide incompressible, le dernier terme de (3.29) est nul. L'advection de la concentration devient alors :

$$\begin{aligned} \vec{v} \cdot \vec{\nabla} C_s &= \vec{\nabla} \cdot (C_s \vec{v}) \\ &= \vec{\nabla} \cdot \vec{q}_s \end{aligned} \quad (3.30)$$

où q_s est le débit de sédiments par unité de volume ($q_s = C_s v$).

En substituant (3.30) dans (3.28), nous obtenons :

$$\frac{\partial C_s}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{q}_s = p \frac{\partial(Z_b - Z_s)}{\partial t} - \frac{\partial(Z_b - Z_s)}{\partial t}. \quad (3.31)$$

Enfin, si nous rassemblons les termes, nous obtenons l'expression suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[(1 - p)(Z_b - Z_s) + \frac{\|\vec{q}_s\|}{\|\vec{v}\|} \right] + \vec{\nabla} \cdot \vec{q}_s = 0 \quad (3.32)$$

où C_s a été remplacé par $\frac{\|\vec{q}_s\|}{\|\vec{v}\|}$. Pour le modèle à une dimension, q_s est donné par av^b où a et b sont des constantes empiriques mesurées au laboratoire et qui dépendent de la nature des sédiments (Bhallamudi & Chaudhry, 1991).

Dans notre modèle, nous allons négliger les effets des eaux souterraines mais nous allons tout de même passer en revue les équations qui s'y rapportent. Les

eaux souterraines consistent au transport et à l'entreposage de l'eau dans les sols perméables que l'on appelle aquifères. Le déplacement de l'eau sous la plaine inondable est donné par l'équation de Boussinesq pour les eaux souterraines (Mwaka, 2001) :

$$T \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) = S_y \frac{\partial \phi}{\partial t} + I(x, y, t) \quad (3.33)$$

où ϕ est la charge potentielle souterraine, T est la transmissivité de l'aquifère, S_y est le rendement spécifique de l'aquifère non confiné et $I(x, y, t)$ est l'infiltration verticale de l'aquifère non confiné. Quant à l'aquifère situé sous la rivière, nous devons remplacer (3.33) par :

$$T \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) = S_c \frac{\partial \phi}{\partial t} + q(x, t, K_1, H, Z_1) \quad (3.34)$$

où S_c est le coefficient d'emménagement de l'aquifère confiné, $q(x, t, K_1, H, Z_1)$ est l'infiltration provenant de la rivière, K_1 est la conductivité hydraulique de la couche de sédiments recouvrant le fond de la rivière, H est le niveau d'eau dans la rivière et Z_1 est l'épaisseur de la couche de sédiments (Mwaka, 2001). La rivière et le système aquifère peuvent être couplés à l'aide de la loi de Darcy :

$$q = \frac{K_1}{Z_1} (\Delta H) \quad (3.35)$$

où q est le débit au travers de la couche de sédiments par unité d'aire et ΔH est la charge hydraulique à travers la couche de sédiments (Mwaka, 2001). La prise en compte de la circulation des eaux souterraines n'est pas négligeable (Katopodes & Bradford, 1999) et devrait être incluse dans les modèles futurs.

3.3 Les équations en eaux peu profondes en 2D

Les équations en eaux peu profondes en 2D (Sadourny, 1975) sont la conservation de la masse :

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (H\vec{V}) = 0, \quad (3.36)$$

la conservation de la quantité de mouvement :

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \eta \hat{N} \times ((H + Z_b)g\vec{V}) + \vec{\nabla} \left((H + Z_b)g + \frac{\vec{V} \cdot \vec{V}}{2} \right) + \frac{gn^2 \|\vec{V}\| \vec{V}}{H^{\frac{4}{3}}} = 0, \quad (3.37)$$

et la conservation de la masse pour les sédiments :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[(1-p)Z_b + \frac{\|\vec{q}_s\|}{\|\vec{V}\|} \right] + \vec{\nabla} \cdot \vec{q}_s = 0. \quad (3.38)$$

Dans l'équation de la conservation de la quantité de mouvement, la vorticité potentielle ² η est égale à $\frac{\vec{\nabla} \times \vec{V}}{(H+Z_b)g}$. \hat{N} est le vecteur normal unitaire. Dans l'équation de la conservation de la masse pour les sédiments, Z_b est ici l'épaisseur de la couche de sédiments. Pour le débit des sédiments, nous avons pris $q_s = \frac{a\|\vec{V}\|^2}{H^b}$ (Bhallamudi & Chaudhry, 1991).

Nous avons discrétisé ces équations à l'aide d'un schéma connu qui utilise les différences finies centrées sur une grille décalée (voir section 4.2.1).

3.4 Changement d'échelles des équations

Le changement d'échelles des équations sert à comparer les écoulements qui partagent la même géométrie mais à différentes échelles (Tritton, 1988). Suite au changement d'échelles, il y apparaît des nombres sans dimensions qui, en général, sont des rapport des différentes quantités physiques entrant en jeux durant l'écoulement. Ces nombres sans dimensions permettent de caractériser le régime de l'écoulement et de décrire les phénomènes physiques dans les unités pertinentes.

Afin de procéder au changement d'échelles des équations, nous allons utiliser les échelles suivantes (abstraites) :

$$t' = \frac{t}{T}, h' = \frac{h}{L}, Z'_b = \frac{Z_b}{L}, u' = \frac{u}{U}, v' = \frac{v}{U}, x' = \frac{x}{L}, y' = \frac{y}{L}, q'_s = \frac{q_s}{UL} \quad (3.39)$$

avec un temps caractéristique T , une échelle de longueur L (profondeur moyenne) et une vitesse moyenne U .

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} + \frac{\partial hv}{\partial y} = 0 \quad (3.40)$$

$$\frac{\partial h'L}{\partial t'T} + \frac{\partial h'Lu'U}{\partial x'L} + \frac{\partial h'Lv'U}{\partial y'L} = 0 \quad (3.41)$$

$$\frac{L}{T} \frac{\partial h'}{\partial t'} + \frac{LU}{L} \frac{\partial h'u'}{\partial x'} + \frac{LU}{L} \frac{\partial h'v'}{\partial y'} = 0 \quad (3.42)$$

²Pour une explication du concept de la vorticité potentielle, voir (Pedlosky, 1987).

$$\frac{L}{T} \frac{\partial h'}{\partial t'} + U \frac{\partial h' u'}{\partial x'} + U \frac{\partial h' v'}{\partial y'} = 0 \quad (3.43)$$

En choisissant un temps caractéristique tel que $T = \frac{L}{U}$, (3.43) devient :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} + \frac{\partial hv}{\partial y} = 0 \quad (3.44)$$

Nous avons enlevé les primes pour simplifier la notation.

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \eta \hat{N} \times ((H + Z_b)g\vec{V}) + \vec{\nabla} \left((H + Z_b)g + \frac{\vec{V} \cdot \vec{V}}{2} \right) + \frac{gn^2 \|\vec{V}\| \vec{V}}{H^{\frac{4}{3}}} = 0 \quad (3.45)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{V}' U}{\partial t' T} + \frac{U}{LLg} \eta' \hat{N} \times ((H' + Z'_b)Lg\vec{V}' U) \\ + \frac{1}{L} \vec{\nabla} \left((H' + Z'_b)Lg + \frac{\vec{V}' U \cdot \vec{V}' U}{2} \right) \\ + \frac{gn^2 \|\vec{V}' U\| \vec{V}' U}{H'^{\frac{4}{3}} L^{\frac{4}{3}}} = 0 \end{aligned} \quad (3.46)$$

$$\begin{aligned} \frac{U}{T} \frac{\partial \vec{V}'}{\partial t'} + \frac{U^2 Lg}{L^2 g} \eta' \hat{N} \times ((H' + Z'_b)\vec{V}') + \frac{Lg}{L} \vec{\nabla} (H' + Z'_b) \\ + \frac{U^2}{L} \vec{\nabla} \left(\frac{\vec{V}' \cdot \vec{V}'}{2} \right) + \frac{gn^2 U^2 \|\vec{V}'\| \vec{V}'}{L^{\frac{4}{3}} H'^{\frac{4}{3}}} = 0 \end{aligned} \quad (3.47)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \eta \hat{N} \times ((H + Z_b)g\vec{V}) + \frac{gL}{U^2} \vec{\nabla} (H + Z_b) + \vec{\nabla} \left(\frac{\vec{V} \cdot \vec{V}}{2} \right) \\ + \frac{gn^2 \|\vec{V}\| \vec{V}}{L^{\frac{1}{3}} H^{\frac{4}{3}}} = 0 \end{aligned} \quad (3.48)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \eta \hat{N} \times ((H + Z_b)g\vec{V}) + \frac{1}{(\text{Fr})^2} \vec{\nabla} (H + Z_b) + \vec{\nabla} \left(\frac{\vec{V} \cdot \vec{V}}{2} \right) \\ + \frac{gn^2 \|\vec{V}\| \vec{V}}{L^{\frac{1}{3}} H^{\frac{4}{3}}} = 0 \end{aligned} \quad (3.49)$$

Nous obtenons ainsi deux nombres sans dimensions : le nombre de Froude,

Fr, et le nombre $\frac{gn^2}{L^{\frac{4}{3}}}$ qui est sans dimension puisque le coefficient de Manning, n , a des unités de $[L^{-\frac{1}{3}}T]$ (section (3.2.2.1)). Le nombre de Froude est un rapport entre la force inertielle et la force de rappel gravitationnelle. L'équation des sédiments est traité de la même manière :

$$(1-p) \frac{\partial(Z_b - Z_s)}{\partial t} + \frac{\partial \frac{\|\vec{q}_s\|}{\|\vec{v}\|}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{q}_s = 0 \quad (3.50)$$

$$(1-p) \frac{\partial(Z'_b L - Z'_s L)}{\partial t' T} + \frac{\partial \frac{\|q'_s \vec{U} L\|}{\|\vec{v}' \vec{U}\|}}{\partial t' T} + \frac{1}{L} \vec{\nabla}' \cdot q'_s \vec{U} L = 0 \quad (3.51)$$

$$\frac{L}{T} (1-p) \frac{\partial(Z'_b - Z'_s)}{\partial t'} + \frac{UL}{UT} \frac{\partial \frac{\|\vec{q}_s\|}{\|\vec{v}'\|}}{\partial t'} + \frac{UL}{L} \vec{\nabla}' \cdot \vec{q}'_s = 0 \quad (3.52)$$

En utilisant $T = \frac{L}{U}$, nous obtenons :

$$(1-p) \frac{\partial(Z_b - Z_s)}{\partial t} + \frac{\partial \frac{\|\vec{q}_s\|}{\|\vec{v}\|}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{q}_s = 0 \quad (3.53)$$

3.5 Ondes de surface

Avec les équations de Saint-Venant en une dimension, on peut obtenir l'expression de la vitesse des ondes de surface ou de gravité. Nous écrivons les équations de Saint-Venant pour une dimension :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} = 0 \quad (3.54)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0. \quad (3.55)$$

Nous allons linéariser les équations pour un état au repos alors, $h = h_0 + \delta h$ où h_0 est la hauteur moyenne et $u = u_0 + \delta u = \delta u$ puisque la vitesse moyenne u_0 est nulle (Cullen, 2001) :

$$\frac{\partial(h_0 + \delta h)}{\partial t} + \frac{\partial(h_0 + \delta h)\delta u}{\partial x} = 0 \quad (3.56)$$

$$\frac{\partial \delta u}{\partial t} + \delta u \frac{\partial \delta u}{\partial x} + g \frac{\partial(h_0 + \delta h)}{\partial x} = 0. \quad (3.57)$$

En développant et en négligeant les termes non-linéaires en δh et δu , nous avons :

$$\frac{\partial(\delta h)}{\partial t} + h_0 \frac{\partial \delta u}{\partial x} = 0 \quad (3.58)$$

$$\frac{\partial \delta u}{\partial t} + g \frac{\partial(\delta h)}{\partial x} = 0. \quad (3.59)$$

Ensuite, nous dérivons (3.58) par t et (3.59) par x :

$$\frac{\partial^2 \delta h}{\partial t^2} + h_0 \frac{\partial^2 \delta u}{\partial t \partial x} = 0 \quad (3.60)$$

$$\frac{\partial^2 \delta u}{\partial x \partial t} + g \frac{\partial^2 \delta h}{\partial x^2} = 0. \quad (3.61)$$

Comme $\frac{\partial^2 \delta u}{\partial t \partial x} = \frac{\partial^2 \delta u}{\partial x \partial t}$, nous pouvons substituer (3.61) dans (3.60) pour obtenir l'équation suivante :

$$\frac{\partial^2 \delta h}{\partial t^2} - h_0 g \frac{\partial^2 \delta h}{\partial x^2} = 0 \quad (3.62)$$

qui est l'équation d'une onde ayant une vitesse donnée par :

$$c = \sqrt{h_0 g}. \quad (3.63)$$

L'équation (3.62) est donc l'équation des ondes de surface. La formule des ondes de gravité (équ. (3.63)) a été dérivée pour la première fois par Lagrange (Chow, 1959). Elle est utilisée comme test dans les codes en eaux peu profondes.

3.6 Les équations adjointes Saint-Venant 1D

Maintenant, nous allons dériver les équations adjointes pour les équations de Saint-Venant en 1D en écrivant le lagrangien pour les équations en eaux peu profondes en une dimension. Pour simplifier la notation, les dérivées partielles seront dénotées par un indice. Le lagrangien pour les équations en eaux peu profondes en 1D est :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \int_0^T \int_0^L J + h^* [h_t + (hv)_x] \\ &+ v^* [v_t + (1/2)v_x^2 + gh_x + gz_x + gv^2 n^2 / h^{\frac{4}{3}}] \\ &+ z^* [(1-p)z_t + a(v^{b-1})_t + av_x^b] dx dt \end{aligned} \quad (3.64)$$

où h^* , v^* et z^* sont les multiplicateurs de Lagrange λ_i qui sont aussi appelés variables adjointes.

Après avoir multiplié les termes des équations par leurs variables adjointes respectives, nous voulons transférer les dérivées des variables réelles aux variables adjointes. L'intégration par parties nous permet de le faire.

Prenons le premier terme comme exemple :

$$\int_0^T \int_0^L h_t h^* dx dt = \int_0^L h^* h|_0^T dx - \int_0^T \int_0^L h h_t^* dx dt \quad (3.65)$$

Après avoir appliqué l'intégration par parties, on remarque un signe moins qui apparaît devant le nouveau terme contenant la dérivée et un terme dépendant des conditions aux frontières. En répétant pour les autres termes, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \int_0^T \int_0^L J - h h_t^* - h v h_x^* - v v_t^* \\ &\quad - (1/2) v^2 v_x^* - g h v_x^* - g z v_x^* + g v^2 n^2 v^* / h^3 \\ &\quad - (1-p) z z_t^* - a v^{b-1} z_t^* - a v^b z_x^* dx dt \\ &\quad + \int_0^L [h^* h + v^* v + z^* ((1-p)z + a v^{b-1})]_0^T dx \\ &\quad + \int_0^T [h^* h v + v^* ((1/2)v^2 + g h + g z) + z^* a v^b]_0^L dt \end{aligned} \quad (3.66)$$

La variation du lagrangien est :

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} &= \int_0^T \int_0^L \delta h [J_h - h_t^* - v h_x^* - g v_x^* - (4/3) g v^2 n^2 v^* / h^3] \\ &\quad + \delta v [J_v - h h_x^* - v_t^* - v v_x^* + 2 v g n^2 v^* / h^3 - a(b-1) v^{b-2} z_t^* - a b v^{b-1} z_x^*] \\ &\quad + \delta z [J_z - g v_x^* - (1-p) z_t^*] dx dt \\ &\quad + \int_0^L [h^* \delta h + v^* \delta v + z^* ((1-p) \delta z + a(b-1) v^{b-2} \delta v)]_0^T dx \\ &\quad + \int_0^T [h^* (v \delta h + h \delta v) + v^* (v \delta v + g \delta h + g \delta z) + a b v^{b-1} z^* \delta v]_0^L dt \end{aligned} \quad (3.67)$$

Nous sommes à un minimum si $\delta \mathcal{L} = 0$. Pour un déplacement $(\delta h, \delta v, \delta z)$ arbitraire, les termes entre parenthèses carrées doivent être nuls pour obtenir $\delta \mathcal{L} = 0$. Nous choisissons les conditions initiales et les conditions aux frontières de façon à ce que les deux dernières intégrales dans $\delta \mathcal{L}$ soient nulles (Daley, 1991).

Les équations adjointes sont alors :

$$h_{\tau}^* - v h_x^* - g v_x^* - (4/3) g v^2 n^2 v^* / h^{\frac{7}{3}} + J_h = 0 \quad (3.68)$$

$$v_{\tau}^* - h h_x^* - v v_x^* + 2 v g n^2 v^* / h^{\frac{4}{3}} + a(b-1) v^{b-2} z_{\tau}^* - a b v^{b-1} z_x^* + J_v = 0 \quad (3.69)$$

$$(1-p) z_{\tau}^* - g v_x^* + J_z = 0 \quad (3.70)$$

où la variable $\tau = T - t$ est l'inverse du temps.

Nous avons comme conditions initiales :

$$h^*(x, \tau|_0) = v^*(x, \tau|_0) = z^*(x, \tau|_0) = 0 \quad (3.71)$$

$$\delta h(x, t|_0) = \delta v(x, t|_0) = \delta z(x, t|_0) = 0 \quad (3.72)$$

et comme conditions aux frontières :

$$h^*(x|_0, \tau) = v^*(x|_0, \tau) = z^*(x|_0, \tau) = 0 \quad (3.73)$$

$$h^*(x|_L, \tau) = v^*(x|_L, \tau) = z^*(x|_L, \tau) = 0. \quad (3.74)$$

Enfin, le gradient de la fonction coût par rapport à la hauteur initiale sera donné par la valeur de la variable adjointe h^* évaluée à $\tau = T$ (Courtier & Talagrand, 1990). Nous avons la même chose pour les autres variables v et z . Le gradient de la fonction coût sera donc déterminé par :

$$\vec{\nabla} J_{h_0} = h^*(x, \tau = T) \quad (3.75)$$

$$\vec{\nabla} J_{v_0} = v^*(x, \tau = T) \quad (3.76)$$

$$\vec{\nabla} J_{z_0} = z^*(x, \tau = T) \quad (3.77)$$

Les équations adjointes sont résolues à l'aide d'itérations avec un pas en temps $d\tau$ à ajuster selon la fréquence des observations.

3.7 Les équations adjointes en 2D

En suivant la méthode présentée pour le cas en 1D, nous trouvons que les équations adjointes sont :

$$\begin{aligned}
 h_{\tau}^* & - uh_x^* - vh_y^* - g(u_x^* + v_y^*) - \frac{ab}{h^{b+1}} \sqrt{\frac{u^4 + v^4}{u^2 + v^2}} z_{\tau}^* \\
 & - \frac{4}{3} \frac{gn^2}{h^{\frac{7}{3}}} \sqrt{u^2 + v^2} (uu^* + vv^*) \\
 & + \frac{ab}{h^{b+1}} (u^2 z_x^* + v^2 z_y^*) + J_h = 0
 \end{aligned} \tag{3.78}$$

$$\begin{aligned}
 u_{\tau}^* & - hh_x^* - uu_x^* + \omega v^* - uv_y^* + \frac{au}{hb} C z_{\tau}^* - \frac{2au}{hb} z_x^* \\
 & + u^* \frac{gn^2}{h^{\frac{4}{3}}} \frac{2u^2 + v^2}{\sqrt{u^2 + v^2}} + v^* \frac{gn^2 vu}{h^{\frac{4}{3}}} \sqrt{u^2 + v^2} + J_u = 0
 \end{aligned} \tag{3.79}$$

$$\begin{aligned}
 v_{\tau}^* & - hh_y^* - vu_x^* - \omega u^* - vv_y^* + \frac{av}{hb} C z_{\tau}^* - \frac{2av}{hb} z_y^* \\
 & + u^* \frac{gn^2 vu}{h^{\frac{4}{3}}} \sqrt{u^2 + v^2} + v^* \frac{gn^2}{h^{\frac{4}{3}}} \frac{u^2 + 2v^2}{\sqrt{u^2 + v^2}} + J_v = 0
 \end{aligned} \tag{3.80}$$

$$(1 - p) z_{\tau}^* - g(u_x^* + v_y^*) + J_z = 0 \tag{3.81}$$

avec $\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$, $C = \frac{u^4 + 2u^2 v^2 - v^4}{(u^2 + v^2)^2} \sqrt{\frac{u^2 + v^2}{u^4 + v^4}}$ et $\tau = T - t$. Notons que ω est le rotationnel de la vitesse.

Chapitre 4

Algorithmes et aspects numériques

4.1 Algorithme de la méthode 4D-VAR

Tout d'abord, nous débutons avec une estimation des conditions initiales qui proviennent des données d'observations ou de laboratoire. On effectue alors une première prédiction en résolvant le problème direct. La figure (4.1) résume les diverses étapes qu'il faut suivre pour pouvoir effectuer des prédictions à l'aide de la méthode 4D-VAR. On suppose également qu'on a choisi une fonction coût. Puisque la plupart des méthodes de minimisation ont besoin du gradient, nous allons calculer ce dernier à l'aide des équations adjointes comme il a été dit plus haut. Suite à la minimisation de la fonction coût, nous avons des nouvelles conditions initiales. Nous utilisons ces conditions initiales dans une nouvelle simulation pour faire une deuxième prédiction. Comme sortie, nous avons une prédiction optimale qui minimise l'erreur entre la prédiction et les observations.

4.2 Discrétisation

4.2.1 Discrétisation du problème direct

Pour le problème direct, nous utilisons le schéma suivant (Arakawa, 1970)¹. En effectuant le produit vectoriel, les équations (3.36) et (3.37) peuvent être écrites

¹L'algorithme 4D-VAR nous permet d'utiliser n'importe quel schéma pourvu qu'il ait la stabilité et la fiabilité voulue. Dans cet ordre d'idée, nous proposons un autre schéma : le schéma de MacCormack que nous allons présenter pour un cas à une dimension mais il est facilement généralisable pour deux dimensions (Chaudhry, 1993). Le schéma de MacCormack de second ordre en temps et espace est facile à programmer et réagit bien aux chocs (Bhallamudi & Chaudhry, 1991).

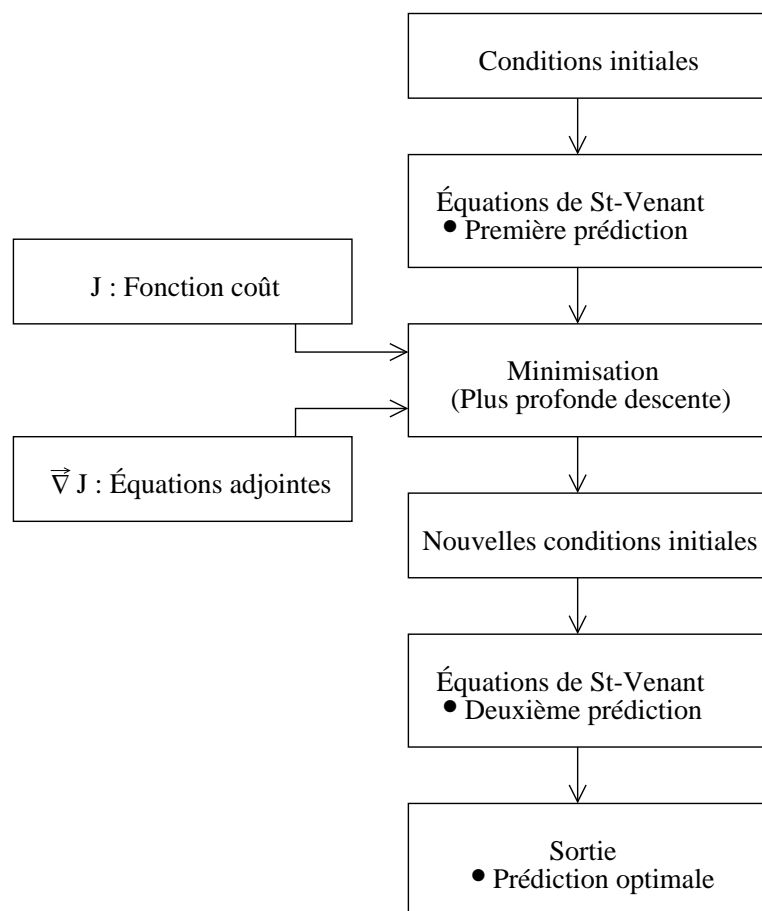


FIG. 4.1 – Algorithme de la méthode 4D-VAR

sous cette forme :

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial Hu}{\partial x} + \frac{\partial Hv}{\partial y} = 0 \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \eta Hv + \frac{\partial E}{\partial x} = 0 \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \eta Hu + \frac{\partial E}{\partial y} = 0 \quad (4.6)$$

Avant de débiter, nous allons choisir la façon de discrétiser les dérivées et les moyennes d'une certaine quantité $q_{i,j}$:

$$\partial_x q_{i,j} = \frac{q_{i,j} - q_{i-1,j}}{\Delta x} \quad (4.7)$$

$$\partial_y q_{i,j} = \frac{q_{i,j} - q_{i,j-1}}{\Delta y} \quad (4.8)$$

$$\bar{q}_{i,j}^x = \frac{q_{i,j} + q_{i-1,j}}{2} \quad (4.9)$$

$$\bar{q}_{i,j}^y = \frac{q_{i,j} + q_{i,j-1}}{2} \quad (4.10)$$

Nous définissons les flux de masse U et V :

$$U = \bar{H}^x u \quad (4.11)$$

et

$$V = \bar{H}^y v. \quad (4.12)$$

D'abord, nous calculons un prédicteur qui n'est qu'une différence finie arrière :

$$U_i^* = U_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} [f(U_i^n) - f(U_{i-1}^n)] + \Delta t F(U_i^n). \quad (4.1)$$

Ensuite, nous calculons un correcteur qui n'est qu'une différence finie avant :

$$U_i^{**} = U_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} [f(U_{i+1}^*) - f(U_i^*)] + \Delta t F(U_i^*). \quad (4.2)$$

Enfin, la nouvelle valeur de U est :

$$U_i^{n+1} = \frac{1}{2} (U_i^* + U_i^{**}). \quad (4.3)$$

Il est possible d'utiliser une différence finie avant pour le prédicteur et une différence finie arrière pour le correcteur. Nous pouvons également les alterner à chaque itération pour une plus grande stabilité (Chaudhry, 1993) (p.317). Nous pouvons également utiliser un schéma semi-lagrangien qui permet l'utilisation d'un plus grand pas en temps (Staniforth & Côté, 1991; Gravel, 1998; Robert, 1982).

L'énergie totale (Bernoulli), E , est :

$$E = (H + Z_b)g + \frac{1}{2}(\overline{u^2} + \overline{v^2}). \quad (4.13)$$

et la vorticité potentielle est :

$$\eta = \frac{\partial_x v - \partial_y u}{\overline{H^{xy}}} \quad (4.14)$$

Nous avons donc :

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \partial_x U + \partial_y V = 0 \quad (4.15)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \overline{\eta^y \overline{V^{xy}}} + \partial_x E = 0 \quad (4.16)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \overline{\eta^x \overline{U^{yx}}} + \partial_y E = 0 \quad (4.17)$$

Si l'on ajoute le terme de Manning, (4.16) et (4.17) deviennent :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \overline{\eta^y \overline{V^{xy}}} + \partial_x E + u \frac{gn^2 \sqrt{u^2 + v^2}}{H^{\frac{4}{3}}} = 0 \quad (4.18)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \overline{\eta^x \overline{U^{yx}}} + \partial_y E + v \frac{gn^2 \sqrt{u^2 + v^2}}{H^{\frac{4}{3}}} = 0 \quad (4.19)$$

Pour discrétiser l'équation du transport des sédiments, on utilise les différences finies avant. Nous développons (3.38) pour obtenir :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[(1-p)Z_b + \frac{\sqrt{q_x^2 + q_y^2}}{\sqrt{u^2 + v^2}} \right] + \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} = 0 \quad (4.20)$$

où q_x et q_y sont les composantes en x et en y du débit de sédiment q_s . En remplaçant la parenthèse de (4.20) par B et en discrétisant, nous avons :

$$\frac{B^{n+1} - B^n}{\Delta t} = - \frac{q_{x_{i+1,j}} - q_{x_{i,j}}}{\Delta x} - \frac{q_{y_{i,j+1}} - q_{y_{i,j}}}{\Delta y} \quad (4.21)$$

et en isolant B^{n+1} :

$$B^{n+1} = B^n - \Delta t \frac{q_{x_{i+1,j}} - q_{x_{i,j}}}{\Delta x} - \Delta t \frac{q_{y_{i,j+1}} - q_{y_{i,j}}}{\Delta y}. \quad (4.22)$$

En utilisant (4.20) et (4.22), nous trouvons Z_b^{n+1} :

$$Z_b^{n+1} = \left(B^{n+1} - \frac{\sqrt{q_x^2 + q_y^2}}{\sqrt{u^2 + v^2}} \right) / (1 - p). \quad (4.23)$$

Les dérivées en temps de (4.15), (4.18) et (4.19) ont été discrétisées par un schéma Leap-Frog en temps. Si $\frac{\partial q}{\partial t} = F$, alors :

$$\frac{q^{n+1} - q^{n-1}}{2\Delta t} = F^n. \quad (4.24)$$

Le schéma Leap-Frog est conservatif mais il est très dispersif (Mitchell & Griffiths, 1980). Dans le but d'atténuer les oscillations numériques résultantes, nous utilisons un terme anti-dispersion (Roache, 1976). Nous utilisons également une viscosité artificielle (section 4.3). Ce lissage est effectué à un intervalle de temps régulier. Enfin, nous avons optimisé le code en le vectorisant (annexe D). Ce schéma numérique ne conserve exactement ni la masse totale :

$$M = \int_S H dS, \quad (4.25)$$

ni l'énergie totale :

$$E = \int_S \frac{1}{2} (H + \vec{V} \cdot \vec{V}) H dS, \quad (4.26)$$

mais l'entrophie² potentielle absolue (Arakawa, 1970) :

$$Z = \int_S \frac{1}{2} \eta^2 H dS. \quad (4.27)$$

4.2.2 Discrétisation des équations adjointes

Pour la discrétisation des équation adjointes, nous avons eu recours à un schéma prédicteur-correcteur de type Lax-Friedrichs (Liska & Wendroff, 1999). Pour utiliser ce schéma conservatif, il faut écrire les équations sous forme $U_t = f_x(U) + g_y(U) + h(U)$ où $h(U)$ représente les termes non-conservatifs. Le premier pas est donné par :

²L'entrophie est la variance de la vorticité

$$\begin{aligned}
U_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2} &= \frac{1}{4}[U_{i,j}^n + U_{i+1,j}^n + U_{i,j+1}^n + U_{i+1,j+1}^n] \\
&+ \frac{\Delta t}{2\Delta x}[F_{i+1,j+1/2} - F_{i,j+1/2}] \\
&+ \frac{\Delta t}{2\Delta y}[G_{i+1/2,j+1} - G_{i+1/2,j}] \\
&+ \frac{\Delta t}{2}h \left(\frac{U_{i,j}^n + U_{i+1,j}^n + U_{i,j+1}^n + U_{i+1,j+1}^n}{4} \right) \quad (4.28)
\end{aligned}$$

où n indice l'itération temporelle et (i, j) indice le point de la grille de calcul bidimensionnelle. Les flux F et G sont évalués en utilisant une approximation du problème de Riemann (Liska & Wendroff, 1999) :

$$F_{i+1,j+1/2} = f \left(\frac{1}{2}[U_{i+1,j+1}^n + U_{i+1,j}^n] + \frac{\Delta t}{4\Delta y}[g(U_{i+1,j+1}^n) - g(U_{i+1,j}^n)] \right) \quad (4.29)$$

et

$$G_{i+1/2,j+1} = g \left(\frac{1}{2}[U_{i+1,j+1}^n + U_{i,j+1}^n] + \frac{\Delta t}{4\Delta x}[f(U_{i+1,j+1}^n) - f(U_{i,j+1}^n)] \right). \quad (4.30)$$

Le correcteur est alors donné par :

$$\begin{aligned}
U_{i,j}^{n+1} &= U_{i,j}^n \\
&+ \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left[f(U_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2}) + f(U_{i+1/2,j-1/2}^{n+1/2}) \right. \\
&\quad \left. - f(U_{i-1/2,j+1/2}^{n+1/2}) - f(U_{i-1/2,j-1/2}^{n+1/2}) \right] \\
&+ \frac{\Delta t}{2\Delta y} \left[g(U_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2}) + g(U_{i-1/2,j+1/2}^{n+1/2}) \right. \\
&\quad \left. - g(U_{i+1/2,j-1/2}^{n+1/2}) - g(U_{i-1/2,j-1/2}^{n+1/2}) \right] + \frac{\Delta t}{2}h(U_{i,j}^n). \quad (4.31)
\end{aligned}$$

4.3 Viscosité artificielle

Des oscillations dues aux erreurs numériques peuvent se produire. Ces oscillations non-physiques peuvent être enlevées grâce à l'ajout d'une viscosité artificielle. Voici une méthode, mise au point pour l'aérodynamique (Jameson et al., 1981), qui réduit les zones de forts gradients (Chaudhry, 1993). Pour une grille de

calcul à deux dimensions, nous évaluons :

$$v_{i,j}^x = \frac{|h_{i+1,j} - 2h_{i,j} + h_{i-1,j}|}{|h_{i+1,j}| + 2|h_{i,j}| + |h_{i-1,j}|} \quad (4.32)$$

et

$$v_{i,j}^y = \frac{|h_{i,j+1} - 2h_{i,j} + h_{i,j-1}|}{|h_{i,j+1}| + 2|h_{i,j}| + |h_{i,j-1}|} \quad (4.33)$$

pour ensuite trouver :

$$\varepsilon_{i+\frac{1}{2},j}^x = \kappa \max(v_{i,j}^x, v_{i+1,j}^x) \quad (4.34)$$

$$\varepsilon_{i-\frac{1}{2},j}^x = \kappa \max(v_{i,j}^x, v_{i-1,j}^x) \quad (4.35)$$

$$\varepsilon_{i,j+\frac{1}{2}}^y = \kappa \max(v_{i,j}^y, v_{i,j+1}^y) \quad (4.36)$$

$$\varepsilon_{i,j-\frac{1}{2}}^y = \kappa \max(v_{i,j}^y, v_{i,j-1}^y) \quad (4.37)$$

où h est, dans notre cas, la hauteur d'eau et κ est un paramètre que l'on ajuste pour obtenir le lissage désiré ($\kappa = 0.01$). La fonction $\max()$ retourne le plus gros argument.

Aux frontières où $h_{i+1,j}$ et $h_{i-1,j}$ n'existent pas, on remplace (4.32) par :

$$v_{i,j}^x = \frac{|h_{i,j} - h_{i-1,j}|}{|h_{i,j}| + |h_{i-1,j}|} \quad (4.38)$$

ou

$$v_{i,j}^x = \frac{|h_{i+1,j} - h_{i,j}|}{|h_{i+1,j}| + |h_{i,j}|}, \quad (4.39)$$

respectivement. Il en va de même pour (4.33) lorsque $h_{i,j+1}$ et $h_{i,j-1}$ ne sont pas définies (Chaudhry, 1993) :

$$v_{i,j}^y = \frac{|h_{i,j} - h_{i,j-1}|}{|h_{i,j}| + |h_{i,j-1}|} \quad (4.40)$$

et

$$v_{i,j}^y = \frac{|h_{i,j+1} - h_{i,j}|}{|h_{i,j+1}| + |h_{i,j}|}. \quad (4.41)$$

Les variables dépendantes, comme les composantes de la vitesse, sont alors modifiées comme suit :

$$\begin{aligned} U_{i,j} = U_{i,j} &+ \varepsilon_{i+\frac{1}{2},j}^x (U_{i+1,j} - U_{i,j}) - \varepsilon_{i-\frac{1}{2},j}^x (U_{i,j} - U_{i-1,j}) \\ &+ \varepsilon_{i,j+\frac{1}{2}}^y (U_{i,j+1} - U_{i,j}) - \varepsilon_{i,j-\frac{1}{2}}^y (U_{i,j} - U_{i,j-1}). \end{aligned} \quad (4.42)$$

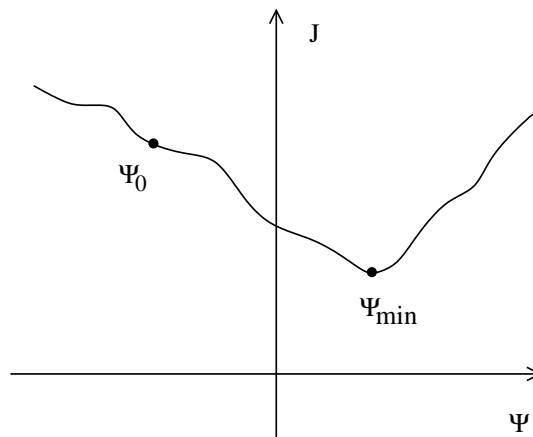


FIG. 4.2 – Schéma de la fonction coût

4.4 Algorithme de minimisation

Cette fonction coût est alors minimisée à l'aide d'un algorithme de minimisation tel que la plus profonde descente³, le gradient conjugué ou le quasi-Newton. Pour la simplicité, nous allons expliquer la méthode de la plus profonde descente pour une fonction coût à une dimension (fig. 4.2). D'abord, nous évaluons la fonction coût à un point initial Ψ_0 . Comme point initial, nous avons soustrait l'erreur des conditions initiales. Cela donne un bon point de départ près du minimum puisque pour un système linéaire, la perturbation initiale sera de même magnitude que la perturbation finale. Pour un système non-linéaire, cela est également vrai si les non-linéarités n'ont pas eu le temps de jouer. Ensuite, nous devons déterminer la direction où J décroît le plus dans le but de trouver un nouveau point plus près du minimum, c'est-à-dire que nous voulons itérer :

$$\Psi_{k+1} = \Psi_k + \alpha_k \vec{p}_k \quad (4.43)$$

où k est l'itération, α_k est la longueur du pas que nous allons effectuer et \vec{p}_k est la direction de recherche. Dans le cas de la plus profonde descente, cette direction est le sens opposé du gradient ($\vec{p}_k = -\vec{\nabla}J$). Pour la méthode de Newton, nous devons résoudre le système $Q\vec{p}_k = -\vec{\nabla}J$ où Q est la matrice hessienne tandis que le quasi-Newton $S\vec{p}_k = -\vec{\nabla}J$ où S est une approximation de la matrice hessienne (Kalnay et al., 2000). On évalue J au nouveau point Ψ_{k+1} . Si $J(\Psi_{k+1}) < J(\Psi_k)$, on ac-

³Pour la programmation de la routine de minimisation, nous nous sommes inspirés de (Daniels, 1978)

cepte Ψ_{k+1} en augmentant l'itérateur k et on recalcule (4.43). D'un autre côté, si $J(\Psi_{k+1}) > J(\Psi_k)$ on refuse Ψ_{k+1} et on recommence (4.43) avec un α_k plus petit. On continue jusqu'à ce que le gradient atteigne la valeur souhaitée ($\vec{\nabla}J \approx 0$) (Burden & Faires, 1993).

Chapitre 5

Deux expériences de contournement

Pour illustrer la méthode 4D-VAR, nous proposons deux expériences de contournement : le contournement d'un barrage théorique et le contournement du barrage Chute-Garneau sur la rivière Chicoutimi lors de l'événement du Saguenay.

Dans les deux expériences de contournement que nous avons menées, nous avons fait une première simulation. Les résultats obtenus lors de cette première simulation ont été considérés par la suite comme étant nos observations. Cette technique où le même modèle numérique sert à la fois à l'assimilation de données et à l'obtention des données se nomme *l'expérience des jumeaux identiques* (Daley, 1991).

Maintenant que nous avons nos observations, nous allons faire des simulations avec une hauteur d'eau initiale ayant 4 cm de moins comparativement aux observations. La signification de cette erreur volontaire de 4 cm d'eau peut être reliée à la négligence de ne pas avoir pris en considération une forte pluie tombée après avoir recueilli les observations sur le terrain. Comme il est tombé environ 20 cm de pluie en 36 heures sur le Saguenay en 1996 (Brooks & Lawrence, 2000), 4 cm d'eau représentent quelques heures de pluie. En examinant la figure (5.1), nous voyons qu'au plus fort de l'orage (le 20 juillet de 6 :00 à 9 :00), il tombe près de 4 cm de pluie durant cette période. Puisque la profondeur de nos deux rivières est d'une dizaine de mètres environ, cette différence dans les niveaux d'eau représente en fait une erreur de moins de 1% dans les conditions initiales. Nous allons voir que l'effet de cette erreur dans les conditions initiales se manifeste déjà après quelques minutes seulement.

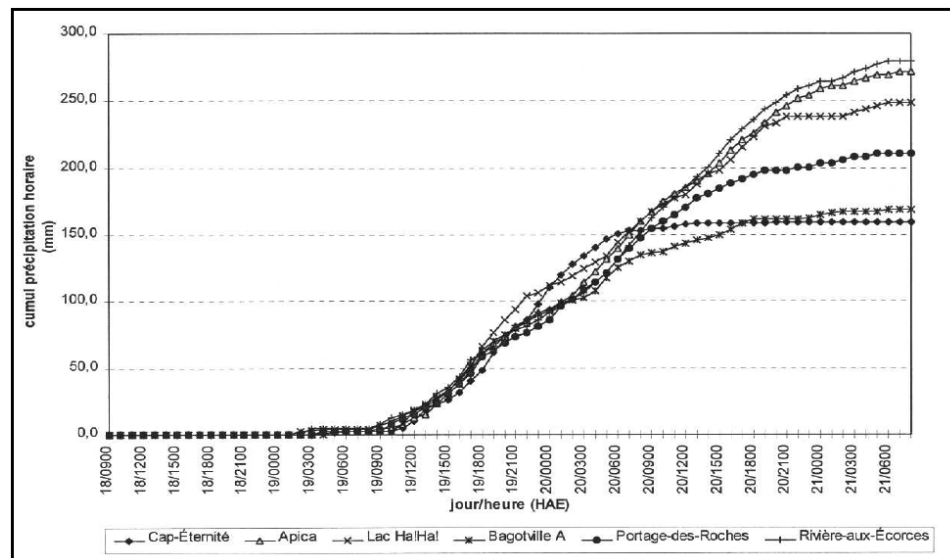


FIG. 5.1 – Précipitation cumulative en mm, figure tirée de (Perrier & Slivitzky, 1999). <http://www.criacc.qc.ca/climat/suivi/extreme/survol.pdf>

5.1 Contournement d'un barrage théorique

La bathymétrie utilisée pour l'expérience que nous avons effectuée est montrée (fig. 5.2). Selon l'échelle de couleur, l'orange foncé correspond à une bathymétrie élevée tandis que le jaune correspond à une bathymétrie moins élevée. Le dégradé montre que nous avons donc un terrain en pente traversé d'une rivière en son milieu. La région à l'étude a une aire de 800 m par 800 m. Le courant entre par le côté gauche (amont) avec une vitesse de 6 m/s et sort à droite (aval). La flèche blanche indique l'emplacement du barrage qui bloque la rivière.

La figure (5.3) montre une coupe transversale de la rivière. Pour notre rivière, nous avons choisi une forme simple avec de l'érosion près de la rive. La rivière a une profondeur d'environ 8 m et une largeur de 160 m.

Nous avons fait une simulation où l'on voit la progression d'un début de contournement (fig. 5.4). Sur cette échelle, le rouge indique une hauteur d'eau maximale de 12 m et le noir indique une absence d'eau. Nous avons choisi cette figure car elle montre la hauteur d'eau initiale. La figure (5.5) montre la hauteur d'eau 2 minutes plus tard. Sur les deux photos, nous notons une absence d'eau sur la rive et sur le barrage comme il fallait s'y attendre. Également, nous voyons le début d'un contournement ainsi que la rivière qui commence à se vider en aval du barrage. Après 2 minutes, nous avons une plus grande accumulation d'eau en amont du barrage. L'eau s'est avancée plus loin sur la rive; ce n'est pas très

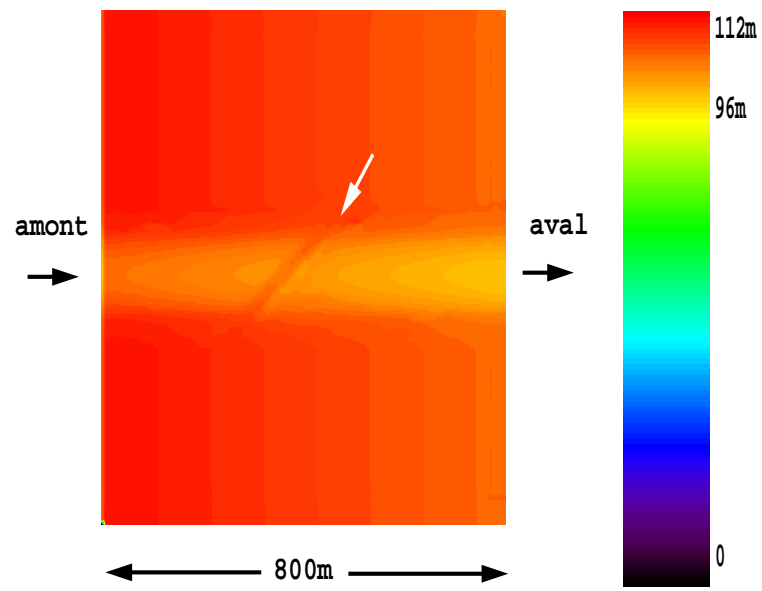


FIG. 5.2 – Bathymétrie du barrage théorique pour le contournement

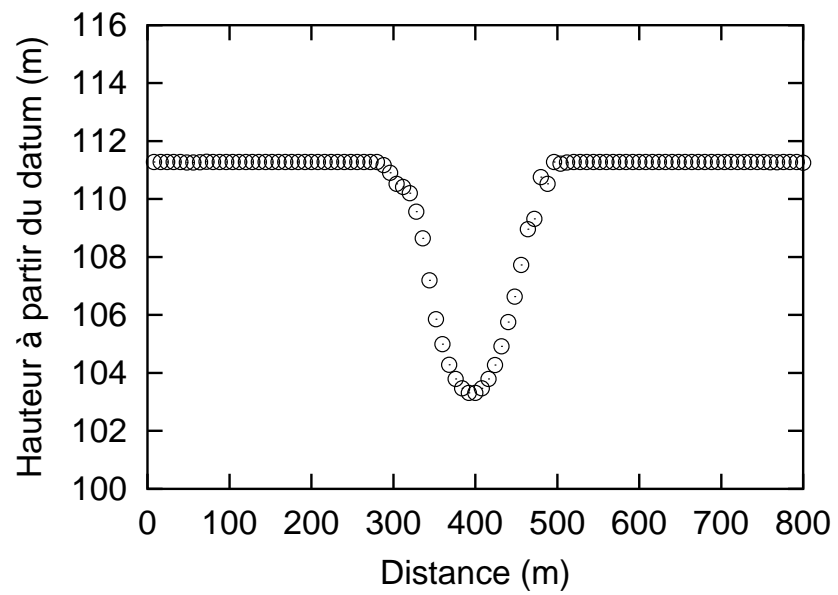
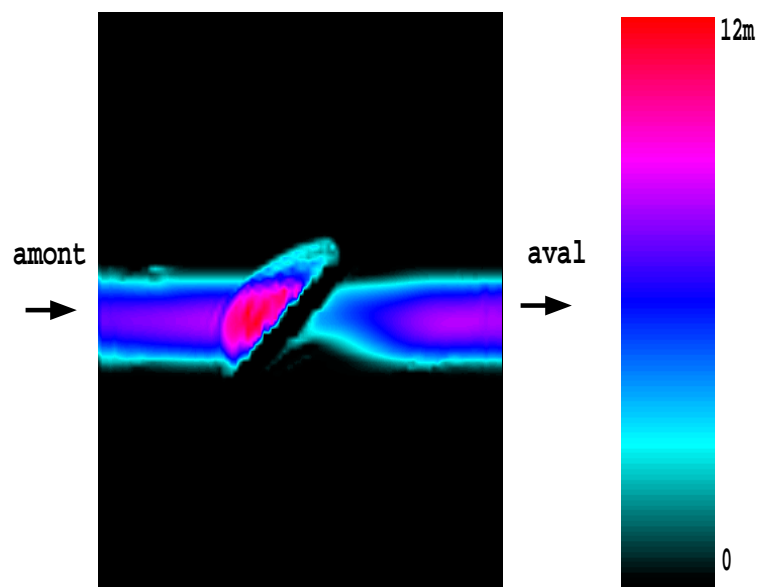
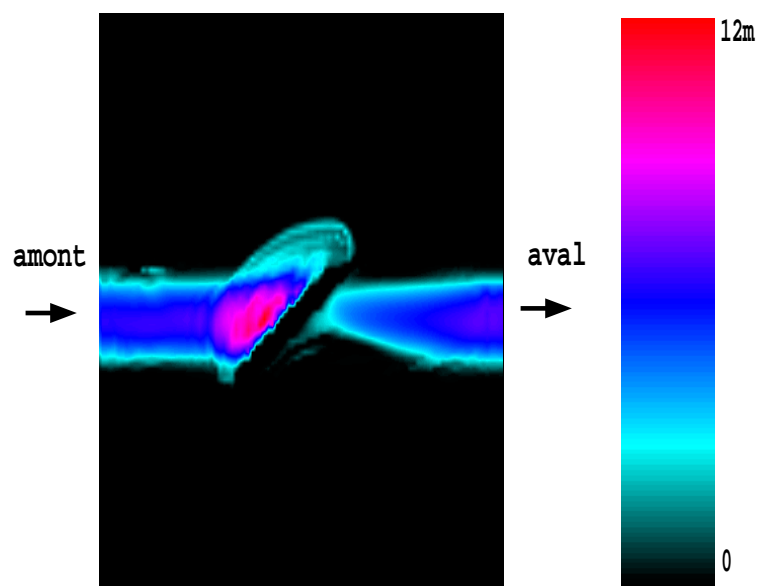


FIG. 5.3 – Forme de la rivière

FIG. 5.4 – Hauteur d'eau du barrage théorique à $t=0$ FIG. 5.5 – Hauteur d'eau du barrage théorique à $t=2$ min.

Itération	Valeur de la fonction coût (m ²)
0	8.617243
1	2.124363
2	2.124304
3	2.124227

TAB. 5.1 – Minimisation de la fonction coût pour le barrage théorique

visible sur la figure (5.5). Enfin, le niveau d'eau en aval du barrage a continué sa diminution. Nous montrons ici une simulation pour les deux minutes parce que cet intervalle de temps est suffisant pour illustrer la méthode.

Le tableau (5.1) montre les différentes valeurs prises par la fonction coût au cours de la minimisation. Après 3 itérations, nous avons atteint le minimum, soit une diminution d'un facteur de 4. Lors de cette minimisation, 83 évaluations de la fonction coût et 3 évaluations de son gradient ont été nécessaires.

Dans le tableau (5.2), nous comparons les erreurs moyennes des points de grille entre les prédictions faites sans utiliser la méthode 4D-VAR et les prédictions obtenues avec la méthode 4D-VAR. La moyenne a été faite sur la rivière seulement. Sans la méthode 4D-VAR, cette petite quantité d'eau nous mène à une erreur moyenne de 12 cm. Cette erreur moyenne plus élevée que l'erreur originale de 4 cm est expliquée par l'accumulation de l'eau près du barrage et par le débet du contournement. Cela indique la sensibilité de la rivière à de petites fluctuations de son niveau d'eau. Avec la méthode 4D-VAR, il y a tout de même une erreur de 1.8 cm mais celle-ci est plus petite que l'erreur initiale de 4 cm. En utilisant la méthode 4D-VAR, nous avons réduit l'erreur d'un facteur de 6. La méthode 4D-VAR s'est aperçue qu'il y avait une erreur dans les conditions initiales et a pu y apporter la correction nécessaire. En ce qui a trait à la vitesse longitudinale, elle a été augmentée d'environ 1 m/s par la crue des eaux. La méthode 4D-VAR réussit à réduire l'erreur de moitié. L'erreur dans la vitesse transversale reste sensiblement la même dans les deux cas. Cela est probablement dû à la géométrie de notre modèle puisque la vitesse transversale joue seulement un rôle près du barrage. La figure

Quantité physique	Erreur moyenne : $\frac{1}{N} \sum E $	
	Sans la méthode 4D-VAR	Avec la méthode 4D-VAR
Hauteur d'eau	12.0 cm	1.8 cm
Vitesse longitudinale	92 cm/s	44 cm/s
Vitesse transversale	21 cm/s	20 cm/s

TAB. 5.2 – Les erreurs dans la prédiction pour le barrage théorique

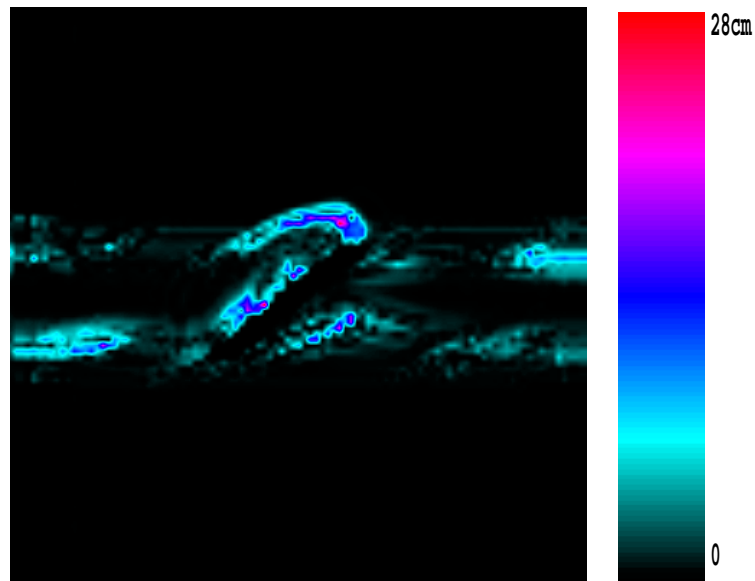


FIG. 5.6 – Erreur dans la hauteur d’eau au barrage théorique avec la méthode 4D-VAR ($t=2\text{min.}$)

(5.6) montre l’erreur dans la hauteur d’eau. L’erreur est maximale pour la vague qui déborde sur la rive et le long du barrage. Également, l’erreur est plus grande le long de la rive comparativement au milieu de la rivière en raison de l’effet de l’érosion de la rive. On peut voir que l’erreur est minimale pour l’endroit où l’eau s’accumule ainsi qu’à l’entrée et la sortie de la rivière. La correction effectuée par la méthode 4D-VAR a été efficace dans ces endroits critiques.

5.2 Contournement du barrage Chute-Garneau

Dans cette expérience, nous avons simulé le début du contournement du barrage Chute-Garneau sur la rivière Chicoutimi. La figure (5.7) indique le relief près du barrage Chute-Garneau. Nous allons considérer un domaine de 300 m par 300 m. L’échelle correspond à l’altitude par rapport au niveau de la mer. Le courant entre par le haut (amont) et sort en bas (aval). Nous pouvons voir le barrage en noir.

D’ailleurs, la figure (5.8) nous montre l’évolution d’un débordement pour une période de 3 heures. Le courant entre par le haut (amont) et sort en bas (aval). La rivière est coupée par le barrage en noir. Le contournement majeur se fait à la gauche du barrage. Nous pouvons aussi apercevoir le début d’un deuxième débordement à la droite du barrage. Ce deuxième débordement commence à devenir

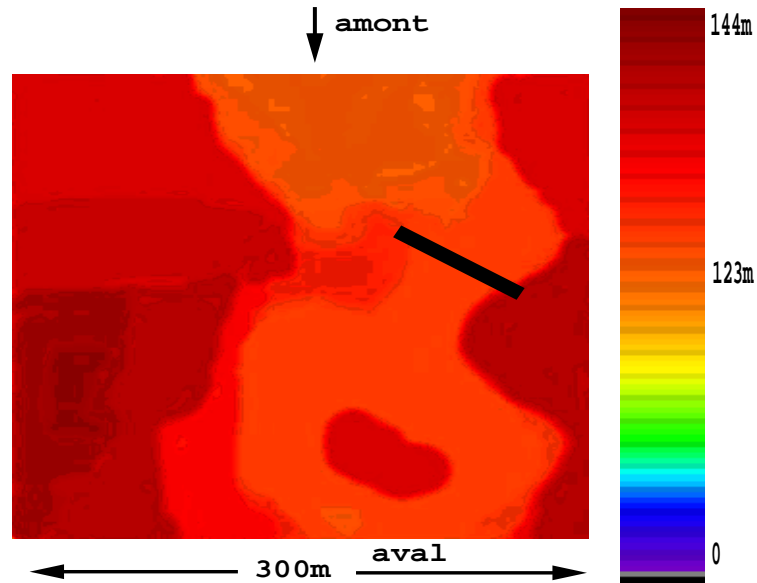


FIG. 5.7 – Bathymétrie près du barrage Chute-Garneau

important après 2 heures. De plus, une faible quantité d'eau inonde le bas de l'île située en aval du barrage. Afin d'initialiser notre simulation, nous avons utilisé du matériel publié par INRS-Eau, 1997.

Pour cette expérience, nous allons montrer les résultats obtenus pour une prédiction de 6 minutes. Les figures (5.9) et (5.10) nous montrent le niveau d'eau initial et celui-ci après 6 minutes, respectivement. Le niveau d'eau maximal est de 14 m. Nous voyons qu'après 6 minutes, le niveau d'eau a diminué. Cette baisse de niveau est probablement due à l'érosion des rives près du barrage. Le débordement n'est pas encore visible sur ces figures. Nous avons fait des prédictions, que nous n'allons pas présenter, sur plusieurs intervalles de temps allant jusqu'à 24 minutes. Pour voir un débordement notable de la rivière, une heure doit être écoulée (fig. 5.8). En considérant l'erreur moyenne, nous constatons que celle-ci est réduite par la mise en application de la méthode 4D-VAR.

Le tableau (5.3) donne un bref aperçu de la minimisation de la fonction coût dans le cas du barrage Chute-Garneau. Nous avons obtenus la convergence après 11 itérations. La fonction coût a diminué de moitié. Enfin, la minimisation a nécessité 72 évaluations de la fonction coût et 11 évaluations de son gradient.

Le tableau (5.4) présente les erreurs moyennes entre deux prédictions : une qui utilise la méthode 4D-VAR et une autre qui ne l'utilise pas. Nous voyons que, si nous n'utilisons pas la méthode 4D-VAR, après 6 minutes nous avons une erreur de l'ordre de l'erreur initiale de 4 cm. En utilisant la méthode 4D-VAR, nous

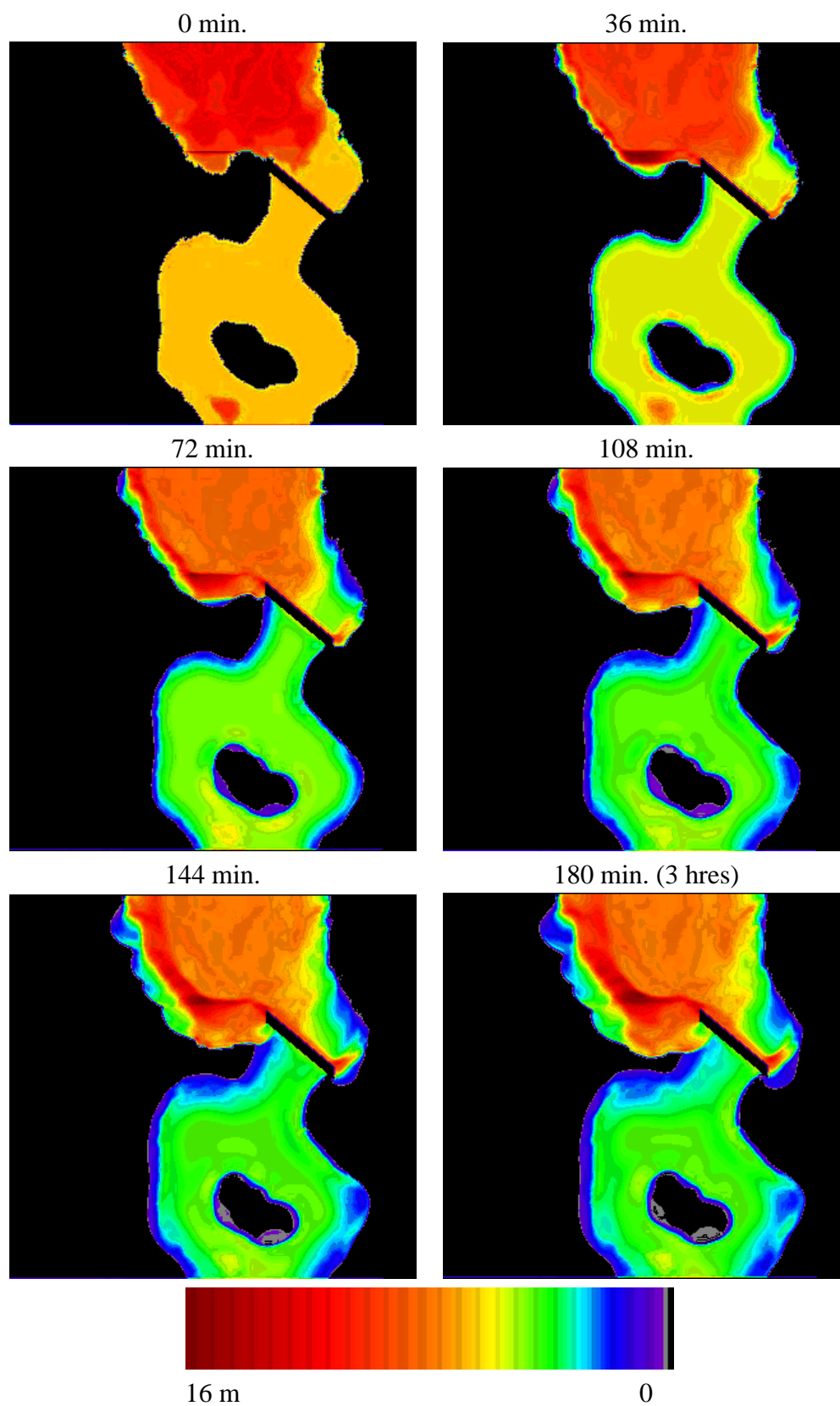


FIG. 5.8 – Simulation du contournement du barrage Chute-Garneau (3 heures)

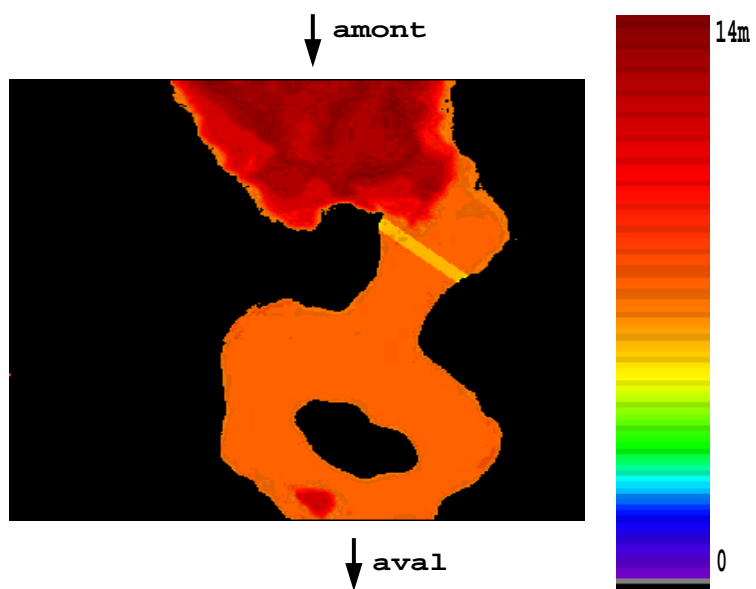


FIG. 5.9 – Hauteur d'eau du barrage Chute-Garneau à t=0

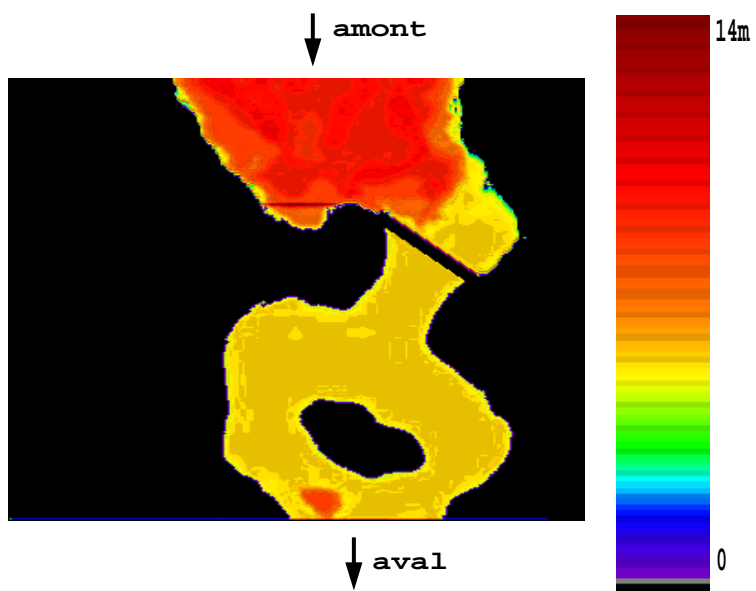


FIG. 5.10 – Hauteur d'eau du barrage Chute-Garneau à t=6 min.

Itération	Valeur de la fonction coût (m ²)
0	520.7579
1	596.7070
2	243.7833
3	227.7736
⋮	⋮
11	208.7744

TAB. 5.3 – Minimisation de la fonction coût pour le barrage Chute-Garneau

Quantité physique	Erreur moyenne : $\frac{1}{N} \sum E $	
	Sans la méthode 4D-VAR	Avec la méthode 4D-VAR
Hauteur d'eau	4.5 cm	0.79 cm
Vitesse longitudinale	0.27 cm/s	0.71 cm/s
Vitesse transversale	0.50 cm/s	0.80 cm/s

TAB. 5.4 – Les erreurs dans la prédiction pour le barrage Chute-Garneau

avons grandement réduit cette erreur à moins d'un centimètre. Les erreurs dans les deux composantes de la vitesse ont augmenté quelque peu. Nous voyons que, malgré la courte durée de la période de prédiction, l'erreur initiale a augmenté de 0.5 cm ce qui pourrait laisser croire qu'elle augmentera davantage à mesure que le temps passera. Cette erreur pourra contaminer les prédictions faites dans le futur. Avec la méthode 4D-VAR, nous aurons donc une meilleure prédiction causée par la diminution de l'erreur (fig. 1.4).

La figure (5.11) montre l'erreur dans le niveau d'eau avec la méthode 4D-VAR lorsque 6 minutes se sont écoulées. Malgré quelques endroits où elle atteint 5 m, l'erreur est très faible. Comme c'est le cas du barrage théorique, l'erreur se situe presque en totalité sur les berges à cause de l'érosion et de l'eau qui tente d'inonder la berge.

5.3 La limite de validité de la méthode

Afin d'étudier la limite de validité de la méthode 4D-VAR, nous devons nous pencher sur le concept de la croissance de l'erreur. L'erreur est définie comme étant la différence entre la prédiction et les observations. Si cette erreur diminue dans le temps, on dit que le système peut être prédit. Une augmentation de cette erreur signifie que l'on doit connaître l'état actuel du système pour faire une prédiction car celui-ci possède une limite de prévisibilité (Lorenz, 1985). Les

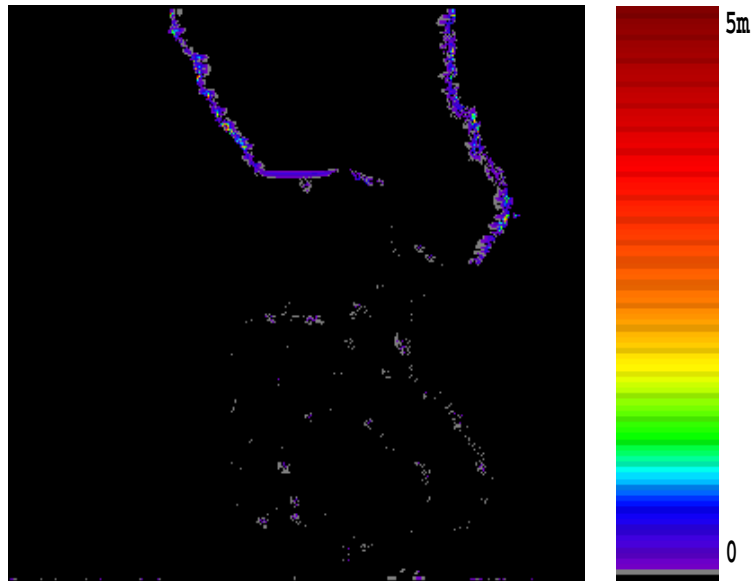


FIG. 5.11 – Erreur dans la hauteur d’eau au barrage Chute-Garneau avec la méthode 4D-VAR (t=6 min.)

systèmes stables ont une prévisibilité infinie puisqu’ils sont stationnaires ou bien périodiques tandis que les systèmes instables ont une limite de prévisibilité (Lorenz, 1963).

Dans le but d’appliquer cette théorie sur notre problème de prédiction, nous avons fait des prédictions pour plusieurs intervalles de temps. Nous avons porté sur la figure (5.12) la qualité de la prédiction en fonction du temps de la prédiction. La qualité de la prédiction, dont les unités sont arbitraires, est l’inverse de l’erreur de la hauteur d’eau entre la prédiction et les observations. La qualité des prédictions effectuées sans la méthode 4D-VAR (■) diminue bien sûr au cours du temps. Avec la méthode 4D-VAR (○), la qualité diminue encore avec la période de prédiction mais elle est meilleure comparativement aux prédictions où la méthode 4D-VAR n’est pas utilisée. Notons que la qualité obtenue avec la méthode 4D-VAR semble converger pour des périodes de prédiction de 30 minutes et plus. La méthode 4D-VAR améliore la prévisibilité de notre problème de prédiction. De plus, une baisse de la qualité signifie que l’erreur augmente. La rivière est donc un système instable. C’est un résultat que nous nous attendions puisque l’écoulement d’une rivière est ni stationnaire, ni périodique.

Pour une durée de temps Δt , une petite perturbation (erreur) initiale $\varepsilon(\Delta t)$ croît exponentiellement :

$$\varepsilon(\Delta t) \propto e^{\lambda \Delta t} \quad (5.1)$$

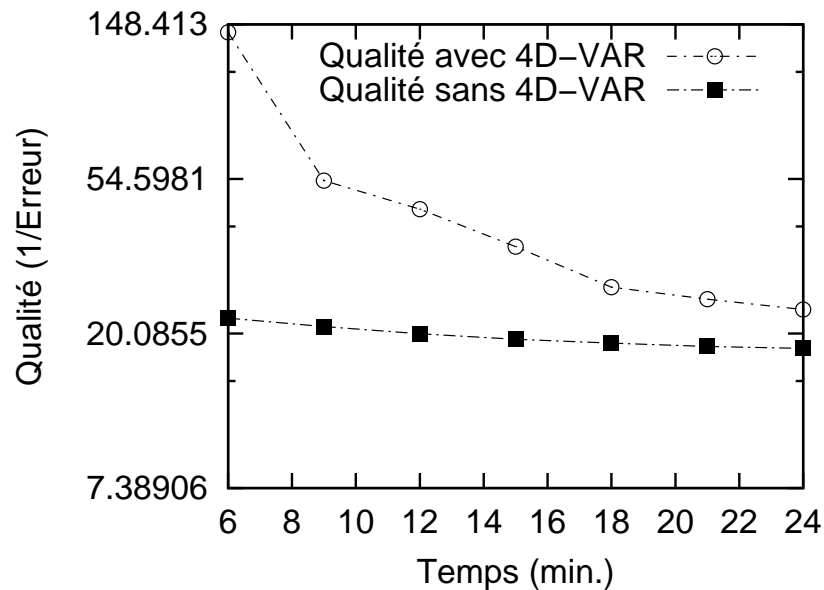


FIG. 5.12 – Qualité de la prédiction

où λ est un exposant de Lyapunov (Smith, 2001). En général, les exposants de Lyapunov d'un système stable sont tous plus petits ou égaux à zéro alors qu'un système instable possède au moins un exposant plus grand que zéro (Kalnay, 2002). Toutefois, il faut remarquer que λ va varier selon le Δt et c'est seulement lorsque $\Delta t \rightarrow \infty$ qu'un λ positif démontre que le système est instable (Smith, 2001). L'exposant de Lyapunov, comme test de prévisibilité, n'est pas très efficace : d'abord c'est une moyenne qui ne prend pas compte de la dynamique de courte durée et la perturbation $\varepsilon(\Delta t)$ doit être infinitésimale (Smith, 2001).

Nous avons trouvé les exposants de Lyapunov qui gouvernent la croissance de l'erreur dans la hauteur d'eau (fig. 5.13). Pour les prédictions faites sans utiliser la méthode 4D-VAR, nous avons trouvé $\lambda = 0.011$ comme exposant de Lyapunov et 0.043 pour la constante de proportionnalité. Nous avons tracé cette courbe (ligne solide en gras) sur la figure (5.13). Dans le cas de l'erreur avec la méthode 4D-VAR, nous avons utilisé les prédictions entre 9 et 18 minutes parce que ces points semblent obéir au même exposant de Lyapunov. Nous avons trouvé $\lambda = 0.078$ avec 0.009 comme constante de proportionnalité (ligne pointillée en gras sur la figure (5.13)). D'après la figure (5.13), on peut constater que plus la durée des prévisions est grande, plus l'exposant de Lyapunov est petit ce qui peut laisser croire que le système se stabilise durant l'intervalle de temps étudié. Malgré tout, le fait que les exposants de Lyapunov sont positifs indique que la rivière est instable. Ce qu'il faut retenir de cette étude de prévisibilité est que le débordement

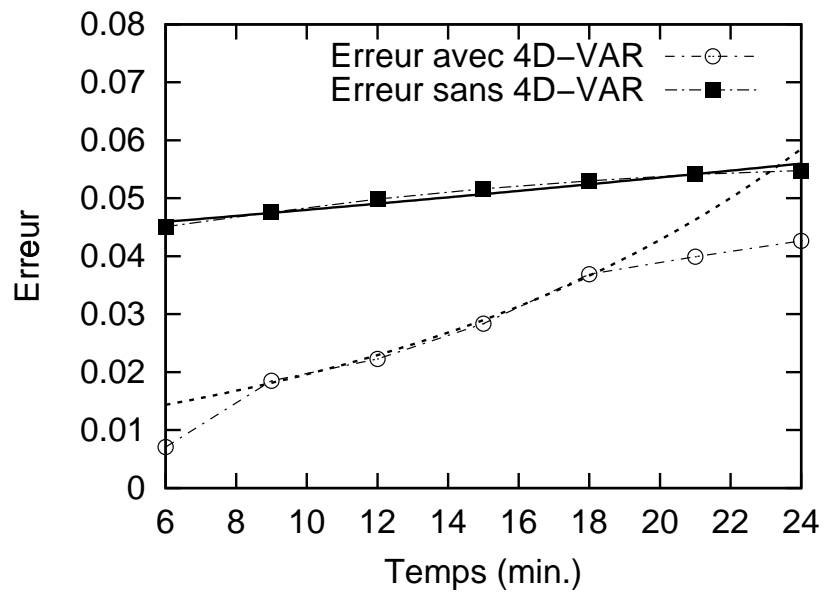


FIG. 5.13 – La croissance de l'erreur et les exposants de Lyapunov

d'une rivière reste difficile à prévoir à cause de la complexité du problème d'où la nécessité de parfaire le modèle des équations physiques.

Chapitre 6

Conclusion et perspectives

Dans ce travail, nous avons expliqué en profondeur la méthode d'assimilation de données 4D-VAR dans le but de faire découvrir cette méthode moderne et de démontrer son potentiel dans la prédiction à court terme d'inondations extrêmes. Pour obtenir des résultats quantitatifs, nous avons appliqué la méthode 4D-VAR aux équations en eaux peu profondes avec sédiments. Comme exemple d'inondation extrême, nous avons choisi le cas du contournement du barrage Chute-Garneau lors du déluge de 1996 sur la région du Saguenay. Après avoir constaté que la méthode 4D-VAR réduit effectivement l'erreur dans la prédiction, nous avons étudié le comportement de cette erreur pour des prédictions sur des intervalles de temps différents. Nous nous sommes aperçu que cette erreur augmente avec le temps de prédiction et nous avons estimé la limite de prévisibilité pour l'écoulement en eaux peu profondes. Enfin, nous avons écrit l'algorithme pour d'autres problèmes comme la convection d'un panache thermique et la prospection électrique.

Plusieurs perspectives d'avenir s'offrent à nous. Les travaux futurs pourraient porter sur l'utilisation d'observations expérimentales prises dans la rivière et sur ses rives. Cette implémentation sur le terrain nécessitera sans doute une amélioration du modèle physique, en incluant par exemple les effets des eaux souterraines, pour mieux refléter les phénomènes naturels à l'oeuvre. Nous avons également porté notre attention sur la prédiction à court terme. Il serait intéressant de voir la performance, particulièrement au niveau de la prévisibilité, de la méthode 4D-VAR pour les prévisions à moyen et long terme. Finalement, nous pourrions voir, dans un avenir rapproché, la propagation de la méthode 4D-VAR dans divers domaines des sciences physiques.

Remerciements

Je voudrais remercier mon directeur de recherche Alain Vincent d'avoir accepté de diriger cette Maîtrise et pour ses précieux conseils. Je remercie également Alexandre Fortin pour sa participation dans le développement du code des équations en eaux peu profondes.

Je tiens particulièrement à remercier Jean-Jacques Rousseau, président-directeur général du CERCA, d'avoir accepté de défrayer les coûts engendrés par ma participation aux conférences CFD2002 et Acfas 2002 ; ce fut une expérience enrichissante. Enfin je remercie le Professeur David Yuen de l'Université du Minnesota pour avoir encouragé l'application au panache thermique.

Cette Maîtrise de Physique a été rendu possible grâce à l'appui financier du RCM2 dans le cadre du projet *Nowcasting* du Service de l'Environnement Atmosphérique du Canada. Le travail numérique a été fait sur les machines du CERCA et du RQCHP (Réseau québécois de calcul de haute performance). J'aimerais remercier Richard Lefebvre, administrateur de système au CERCA, pour son aide technique ainsi que Michel Béland, du RQCHP, pour ses conseils sur l'utilisation des machines du RQCHP.

Bibliographie

- Arakawa, A. (1970). Numerical simulation of large scale atmospheric motions. Dans *S.I.A.M.-A.M.S. Proceedings*.
- ASME (2002). Proceedings of 2002 ASME joint U.S.-European Fluids Engineering Conference. Juillet 14–18, Montréal.
- Bewley, T. R. (2001). Flow control : new challenges for a new Renaissance. *Progress in Aerospace Sciences*, 37(1), 21–58.
- Bewley, T. R., Moin, P., & Temam, R. (2001). DNS-based predictive control of turbulence : an optimal benchmark for feedback algorithms. *Journal of Fluid Mechanics*, 447, 179–225.
- Bhallamudi, S. M. & Chaudhry, M. H. (1991). Numerical modeling of aggradation and degradation in alluvial channels. *Journal of Hydraulic Engineering*, 117(9), 1145–1164.
- Bélanger, E. & Vincent, A. (2002). *Assimilation de données (4D-VAR) pour l'équation de Burgers, la convection thermique et la prospection électrique*. Rapport Technique R2002-77, CERCA.
- Boullanger, O. (2001). Imagerie gravimétrique et électrique 3D. Présentation CERCA (Géophysique appliquée).
- Boullanger, O. & Chouteau, M. (2001). Constraints in 3D gravity inversion. *Geophysical Prospecting*, 49, 265–280.
- Bouttier, F. & Courtier, P. (1999). *Data assimilation concepts and methods*. European Centre for Medium-Range Weather Forecasts, Reading, Royaume-Uni. http://wms.ecmwf.int/newsevents/training/rcourse_notes/ps_files/Assim_concepts.ps.gz.
- Brooks, G. R. & Lawrence, D. E. (1998). *Geomorphic effects and impacts of severe flooding : photographic examples from the Saguenay area, Quebec*. Miscellaneous report 62, Geological survey of Canada.

- Brooks, G. R. & Lawrence, D. E. (2000). Geomorphic effects of flooding along reaches of selected rivers in the Saguenay region, Québec, July 1996. *Géographie physique et Quaternaire*, 54(3), 281–299.
- Budgell, W. P. (1986). Nonlinear data assimilation for shallow water equations in branched channels. *Journal of Geophysical Research*, 91(C9), 10633–10644.
- Burden, R. L. & Faires, J. D. (1993). *Numerical Analysis*. Boston : PWS Publishing Company.
- Burgers, J. M. (1948). A mathematical model illustrating the theory of turbulence. *Advances in Applied Mechanics*, 1, 171–199.
- Burgers, J. M. (1974). *The Nonlinear Diffusion Equation*. Dordrecht : Reidel.
- Carlsson, J. (1997). *The Monte-Carlo method – a cookbook approach*. Rapport technique, Alfvén Laboratory, Royal Institute of Technology, Stockholm.
- Chanson, H. (1999). *The Hydraulics of Open Channel Flow*. New York : John Wiley & Sons.
- Chaudhry, M. H. (1993). *Open-Channel Flow*. Englewood Cliffs, New Jersey : Prentice-Hall.
- Chow, V. T. (1959). *Open-Channel Hydraulics*. New York : McGraw-Hill.
- Coiffier, J. (2000). Un demi-siècle de prévision numérique du temps. *La Météorologie*, 8(30), 11–31.
- Courtier, P. (1997). Variational methods. Dans M. Ghil, K. Ide, A. Bennett, P. Courtier, M. Kimoto, M. Nagata, M. Saiki, & N. Sato (Éds.), *Data Assimilation in Meteorology and Oceanography : Theory and Practice* (pp. 211–218). Tokyo : Meteorological Society of Japan.
- Courtier, P., Derber, J., Errico, R., Louis, J.-F., & Vukićević, T. (1993). Important literature on the use of adjoint, variational methods and the Kalman filter in meteorology. *Tellus*, 45A, 342–357.
- Courtier, P. & Talagrand, O. (1990). Variational assimilation of meteorological observations with the direct and adjoint shallow-water equations. *Tellus*, 42A, 531–549.
- Cressman, G. P. (1959). An operational objective analysis system. *Monthly Weather Review*, 87(10), 367–374.
- Cullen, M. (2001). *Properties of the equations of motion*. European Centre for Medium-Range Weather Forecasts, Reading, Royaume-

- Uni. http://wms.ecmwf.int/newsevents/training/rcourse_notes/ps_files/Properties_of_equations.ps.gz.
- Daley, R. (1991). *Atmospheric Data Analysis*. Cambridge atmospheric and space science series. Cambridge : Cambridge University Press.
- Daniels, R. W. (1978). *An Introduction to Numerical Methods and Optimization Techniques*. New York : North-Holland.
- Dingman, S. L. (1984). *Fluvial hydrology*. New York : Freeman.
- Egbert, G. (2002). Electromagnetic inversion : a data assimilation perspective. EM5 : Modeling and Inversion, 16th EM Induction Workshop, Santa Fe, June 16–22, 2002.
- Ehrendorfer, M. (1992). Four-dimensional data assimilation : comparison of variational and sequential algorithms. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 118, 673–713.
- Errico, R. M. (1997). What is an adjoint model ? *Bulletin of the American Meteorological Society*, 78(11), 2577–2591.
- Errico, R. M., Vukićević, T., & Raeder, K. (1993). Examination of the accuracy of a tangent linear model. *Tellus*, 45A, 462–477.
- Espinoza, J., Rojas, J., Martínez-Austria, P., & Caldiño, I. (1996). Experimental study of bed forms in shallow channel. Dans M. Rahman & C. Brebbia (Éds.), *Advances in Fluid Mechanics*, volume 9 de *Advances in Fluid Mechanics* (pp. 245–254). Southampton : Computational Mechanics Publications.
- Finlayson, B. A. (1992). *Numerical methods for Problems with Moving Fronts*, chapitre 3, (pp. 50–54). Ravenna Park Publishing : Seattle.
- Fredsøe, J. & Deigaard, R. (1992). *Mechanics of Coastal Sediment Transport*, volume 3 de *Advanced Series on Ocean Engineering*. Singapore : World Scientific.
- Gravel, S. (1998). The semi-Lagrangian method. Dans *CRM Proceedings and Lecture Notes*, volume 16 (pp. 111–120). : Centre de Recherches Mathématiques.
- Grønnevik, R. & Evensen, G. (2001). Application of ensemble-based techniques in fish stock assessment. *Sarsia*, 86, 517–526,.
- Haberman, R. (1977). *Mathematical models : mechanical vibrations, population dynamics, and traffic flow, an introduction to applied mathematics*. Prentice-Hall.

- Hall, M. C. G. & Cacuci, D. G. (1983). Physical interpretation of the adjoint functions for sensitivity analysis of atmospheric models. *Journal of the atmospheric sciences*, 40, 2537–2546.
- Ide, K., Courtier, P., Ghil, M., & Lorenc, A. (1997). Unified notation for data assimilation : Operational, sequential and variational. Dans M. Ghil, K. Ide, A. Bennett, P. Courtier, M. Kimoto, M. Nagata, M. Saiki, & N. Sato (Éds.), *Data Assimilation in Meteorology and Oceanography : Theory and Practice* (pp. 71–79). Tokyo : Meteorological Society of Japan.
- INRS-Eau (1997). Simulation hydrodynamique et bilan sédimentaire des rivières Chicoutimi et des Ha ! Ha ! suite aux crues exceptionnelles de juillet 1996. Rapport INRS-Eau No. R487, <http://www.inrs-eau.quebec.ca/saguenay/>.
- Jahn, J. (1996). *Introduction to the theory of nonlinear optimization*. New York : Springer, 2^e édition.
- Jameson, A., Schmidt, W., & Turkel, E. (1981). Numerical solutions of the Euler equations by finite volume methods using Runge-Kutta time-stepping schemes. Dans *AIAA-81-1259*, AIAA 14th Fluid and Plasma Dynamics Conference, Palo Alto, California.
- Kalman, R. E. (1960). A new approach to linear filtering and prediction problems. *Journal of Basic Engineering*, 82(Série D), 35–45.
- Kalnay, E. (2002). *Atmospheric Modeling, Data Assimilation and Predictability*, chapitre 6. Cambridge University Press. (Sous presse), <http://www.meto.umd.edu/~ekalnay/>.
- Kalnay, E., Ki Park, S., Pu, Z.-X., & Gao, J. (2000). Application of the quasi-inverse method to data assimilation. *Monthly Weather Review*, 128(3), 864–875.
- Kantha, L. H. & Clayson, C. A. (2000). *Numerical Models of Oceans and Oceanic Processes*, volume 66 de *International Geophysics Series*, chapitre 14. Academic Press.
- Kardar, M., Parisi, G., & Zhang, Y.-C. (1986). Dynamic scaling of growing interfaces. *Physical Review Letters*, 56(9), 889–892.
- Katopodes, N. D. & Bradford, S. (1999). Mechanics of overland flow. Dans *International Workshop on Numerical Modeling of Hydrodynamic Systems* (pp. 1–23). Zaragoza, Spain.

- Lagarde, T. (2000). *Nouvelle approche des méthodes d'assimilation de données : les algorithmes de point de selle*. Thèse de doctorat, Université Paul Sabatier, Toulouse.
- Lapointe, M. F. (1994). L'évolution du lit du Saint-Laurent dans le secteur de Contrecoeur (Québec) depuis un siècle. *Géographie physique et Quaternaire*, 48(1), 39–50.
- Lapointe, M. F., Secretan, Y., Driscoll, S. N., Bergeron, N., & Leclerc, M. (1998). Response of the Ha ! Ha ! River to the flood of July 1996 in the Saguenay Region of Quebec : Large-scale avulsion in a glaciated valley. *Water Resources Research*, 34(9), 2383–2392.
- Le Dimet, F.-X. & Talagrand, O. (1986). Variational algorithms for analysis and assimilation of meteorological observations : theoretical aspects. *Tellus*, 38A, 97–110.
- Lina, J. M. (1998). *Introduction aux filtres de Kalman*. Rapport technique, RCM2.
- Lions, J. L. (1968). *Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles*. Paris : Dunod.
- Liska, R. & Wendroff, B. (1999). 2D shallow water equations by composite schemes. *Int. J. Numerical Methods in Fluids*, 30, 461–479.
- Lorenc, A. C. (1986). Analysis methods for numerical weather prediction. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 112, 1177–1194.
- Lorenz, E. N. (1963). Deterministic nonperiodic flow. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 20(2), 130–141.
- Lorenz, E. N. (1985). The growth of errors in prediction. Dans M. Ghil (Éd.), *Turbulence and predictability in geophysical fluid dynamics and climate dynamics* (pp. 243–265). : Italian Physical Society North-Holland.
- Madsen, H. & Cañizares, R. (1999). Comparison of extended and ensemble kalman filters for data assimilation in coastal area modelling. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 31, 961–981.
- Marion, J. B. & Thornton, S. T. (1988). *Classical dynamics of particles & systems*. San Diego : Harcourt Brace Jovanovich, 3^e édition.
- Mitchell, A. R. & Griffiths, D. F. (1980). *The finite difference method in partial differential equations*. Wiley.
- Mwaka, B. M. L. (2001). Numerical simulation of baseflow modification due to effects of sediment yield. *Water SA*, 27(2), 205–211.

- Nadarajah, S. K. & Jameson, A. (2000). A comparison of the continuous and discrete adjoint approach to automatic aerodynamic optimization. Dans *AIAA-2000-0667*, AIAA 38th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, Reno, Nevada.
- Newell, G. F. (1993). A simplified theory of kinematic waves in highway traffic, Part I : General theory. *Transportation Res.-B*, 27B(4), 281–287.
- Nicolet, R., Roy, L., Arès, R., Dufour, J., Marinier, G., & Morin, G. (1997). *Rapport : Commission scientifique et technique sur la gestion de barrages*. Rapport technique, Québec.
- Pedlosky, J. (1987). *Geophysical fluid dynamics*. New York : Springer-Verlag, 2^e édition.
- Perrier, R. & Slivitzky, M. (1999). *Survol des cas de pluies abondantes au Québec*. Rapport Technique SEC-Q99-02, Environnement Canada. <http://www.criacc.qc.ca/climat/suivi/extreme/survol.pdf>.
- Roache, P. J. (1976). *Computational Fluid Dynamics*. Hermosa.
- Robert, A. (1982). A semi-implicit and semi-Lagrangian numerical integration scheme for the primitive meteorological equations. *J. Meteorol. Soc. Jpn*, 60, 319–325.
- RPN (2001). *Cours No.6 (Assimilation)*. Centre météorologique canadien (CMC). <http://www.cmc.ec.gc.ca/rpn/publications/pdf/>.
- RQCHP (2002). Description détaillée du NEC SX-5S. <http://www.rqchp.qc.ca/sites/cerca/nec/description.html>.
- Sadourny, R. (1975). The dynamics of finite-difference models of the shallow-water equations. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 32(4), 680–689.
- Saint-Venant, A. J. C. B. (1871). Théorie du mouvement non permanent des eaux, avec application aux crues des rivières et à l'introduction des marées dans leur lits. *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 73, 147–154 et 237–240.
- Sanders, B. F. & Katopodes, N. D. (1999). Control of canal flow by adjoint sensitivity method. *Journal of irrigation and drainage engineering*, 125(5), 287–297.
- Sanders, B. F. & Katopodes, N. D. (2000). Adjoint sensitivity analysis for shallow-water wave control. *Journal of Engineering Mechanics*, 126(9), 909–919.

- Smith, L. A. (2001). Predictability and modelling : Lessons from low dimensional dynamics. <http://www.maths.ox.ac.uk/~hardenbe/lldd/lldd.html>.
- Staniforth, A. & Côté, J. (1991). Semi-Lagrangian integration schemes for atmospheric models – A review. *Monthly Weather Review*, 119, 2206–2223.
- Sun, X. & Aubry, N. (2002). Optimal control of vortex shedding by an electromagnetic field. Dans *Proceedings of 2002 ASME Joint U.S.-European Fluids Engineering Conference*. Juillet 14–18, Montréal.
- Talagrand, O. (1981). On the mathematics of data assimilation. *Tellus*, 33, 321–339.
- Talagrand, O. (1997). Assimilation of observations, an introduction. Dans M. Ghil, K. Ide, A. Bennett, P. Courtier, M. Kimoto, M. Nagata, M. Saiki, & N. Sato (Éds.), *Data Assimilation in Meteorology and Oceanography : Theory and Practice* (pp. 191–209). Tokyo : Meteorological Society of Japan.
- Talagrand, O. & Courtier, P. (1987). Variational assimilation of meteorological observations with the adjoint vorticity equation. I : Theory. *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, 113, 1311–1328.
- Todling, R. & Cohn, S. E. (1994). Suboptimal schemes for atmospheric data assimilation based on the Kalman filter. *Monthly Weather Review*, 122, 2530–2557.
- Tritton, D. J. (1988). *Physical Fluid Dynamics*. Oxford University Press, 2^e édition.
- Verlaan, M. & Heemink, A. W. (1996). Data assimilation schemes for non-linear shallow water flow model. Dans M. Rahman & C. Brebbia (Éds.), *Advances in Fluid Mechanics*, volume 9 de *Advances in Fluid Mechanics* (pp. 277–286). Southampton : Computational Mechanics Publications.
- Voorrips, A. C., Heemink, A. W., & Komen, G. J. (1999). Wave data assimilation with the Kalman filter. *Journal of Marine Systems*, 19, 267–291.
- Wenzel, M. (2001). *Adjoint Method (4D-VAR)*. The Alfred Wegener Institute Foundation for Polar and Marine Research. <http://e-net.awi-bremerhaven.de/Modelling/INVERSE/adjoint.html>.
- Wolf, T., Sénégas, J., Bertino, L., & Wackernagel, H. (2000). Application of data assimilation to three-dimensional hydrodynamics : the case of the Odra lagoon. Dans P. Monestiez, D. Allard, & R. Froidevaux (Éds.), *Proceedings of*

the Third European Conference on Geostatistics for Environmental Applications (pp. 157–168). Avignon, France.

Yalin, M. S. (1992). *River Mechanics*. Oxford : Pergamon Press.

Zhou, J. G. & Stansby, P. K. (1999). 2D shallow water flow model for the hydraulic jump. *Int. J. Numer. Methods in Fluids*, 29(4), 375–387.

Zuccher, S. & Luchini, P. (2002). Time-dependent optimal perturbations for the algebraic instability in the nonlinear regime. Dans *Proceedings of 2002 ASME Joint U.S.-European Fluids Engineering Conference*. Juillet 14–18, Montréal.

Annexe A

L'équation de Burgers

A.1 L'équation de Burgers et ses applications

Dans cette étude nous allons appliquer la méthode 4D-VAR à l'équation de Burgers pour une dimension :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (\text{A.1})$$

où u est une quantité (ayant les dimensions LT^{-1}) analogue à une vitesse et ν est une diffusivité ou une viscosité cinématique avec les dimensions de L^2T^{-1} . Quant aux trois termes (de dimension LT^{-2}), nous notons que le premier a la forme d'une accélération, le second une advection et le troisième une diffusivité ou une viscosité.

Elle a été dérivée en 1948 (Burgers, 1948) pour modéliser la turbulence hydrodynamique et les chocs (Burgers, 1974).

Dans les sections suivantes, nous allons démontrer que malgré sa simplicité, l'équation de Burgers a plusieurs applications (Bélanger & Vincent, 2002).

A.1.1 Modèle pour la croissance d'une interface

L'équation de Langevin pour la hauteur $h(x, t)$ d'une interface qui croît est :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\lambda}{2} \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 = \nu \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}. \quad (\text{A.2})$$

En utilisant la substitution $u = \frac{\partial h}{\partial x}$, on obtient :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \lambda u \frac{\partial u}{\partial x} = v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (\text{A.3})$$

ce qui donne l'équation de Burgers lorsque $\lambda = 1$ (Kardar et al., 1986).

A.1.2 Mathématiques financières

L'équation de Black-Scholes est :

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 s^2 \frac{\partial^2 F}{\partial s^2} + rs \frac{\partial F}{\partial s} - rF = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad s \geq 0 \quad (\text{A.4})$$

où $F(t, s)$ est l'option d'acheter un titre à un prix prédéterminé, t est le temps, s est le prix courant du titre, σ est la volatilité du titre et r est le taux d'intérêt (Carlsson, 1997).

Si on inverse le temps ($t \rightarrow T - t$), on obtient :

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial s} \left[\underbrace{(\sigma^2 - r)sF}_{\text{advection}} - \underbrace{\frac{\sigma^2 s^2}{2} \frac{\partial F}{\partial s}}_{\text{diffusif}} \right]}_{\text{Flux total}} = \underbrace{(\sigma^2 - 2r)F}_{\text{Terme source}}. \quad (\text{A.5})$$

A.1.3 Écoulement d'un embouteillage

L'écoulement est défini comme étant le nombre de véhicules qui passent un certain point pendant un temps donné. L'embouteillage peut être formée par des feux rouges qui créent un amoncellement de véhicules.

Si nous considérons une route à une voie ayant un écoulement $q(x, t)$, nous avons :

$$\frac{\partial q}{\partial t} + v(q, x) \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad (\text{A.6})$$

où $v(q, x)$ est la vitesse du bouchon (Newell, 1993; Haberman, 1977).

A.2 Discrétisation utilisée

On réécrit l'équation de Burgers :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial x} = v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (\text{A.7})$$

Nous allons utiliser un schéma à différences finies amont en espace et Euler en temps ¹ :

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= u_j^n - \frac{\delta t}{2\delta x} [(u_j^n)^2 - (u_{j-1}^n)^2] \\ &\quad + \frac{v\delta t}{\delta x^2} (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n). \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

De plus, ce schéma est plus stable que les schémas de *Lax-Wendroff*, *Galerkin* et *Petrov-Galerkin* (Finlayson, 1992).

A.3 La fonction coût et son gradient

Soit M le modèle non-linéaire qui prend un état \mathbf{x}_0 et l'emmène au temps t ($\mathbf{x}_t = M(\mathbf{x}_0)$), A_t l'analyse (observations au temps t), $E = M - A_t$ l'erreur, L le propagateur linéaire et L^* son adjoint tel définit dans le produit scalaire $\langle \mathbf{x}, L\mathbf{y} \rangle = \langle L^*\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ pour n'importe quels \mathbf{x}, \mathbf{y} .

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}, L\mathbf{y} \rangle &= \langle L^*\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \\ \mathbf{x}^T W^2 L\mathbf{y} &= (L^*\mathbf{x})^T W^2 \mathbf{y} \\ \mathbf{x}^T W^2 L\mathbf{y} &= \mathbf{x}^T (L^*)^T W^2 \mathbf{y} \\ \Rightarrow W^2 L &= (L^*)^T W^2 \\ (L^*)^T &= W^2 L W^{-2} \\ L^* &= W^{-2} L^T W^2 \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

¹Si nous exprimons u dans ses expansions de Taylor, nous avons :

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \delta t \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_j^n + \frac{\delta t^2}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)_j^n + O(\delta t^3) \quad (\text{A.8})$$

$$u_{j+1}^n = u_j^n + \delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_j^n + \frac{\delta x^2}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_j^n + O(\delta x^3) \quad (\text{A.9})$$

$$u_{j-1}^n = u_j^n - \delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_j^n + \frac{\delta x^2}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_j^n + O(\delta x^3) \quad (\text{A.10})$$

où les indices j et n représentent respectivement l'espace et le temps. Nous utilisons (A.8) pour obtenir par isolation le terme $\frac{\partial u}{\partial t}$. Pour le terme $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, nous l'isolons après avoir additionné (A.9) et (A.10). Si on substitue u par u^2 dans (A.10) nous pouvons isoler $\frac{\partial u^2}{\partial x}$. Et nous obtenons (A.11).

La méthode 4D-VAR nous donne la perturbation $\delta\mathbf{x}_0$ dans les conditions initiales qui produit :

$$M(\mathbf{x}_0 + \delta\mathbf{x}_0) = A_t \quad (\text{A.13})$$

où :

$$\delta\mathbf{x}_t = L\delta\mathbf{x}_0 \cong M(\mathbf{x}_0) - A_t = E. \quad (\text{A.14})$$

Dans l'approche standard, on construit une fonction coût. Nous allons utiliser la norme d'énergie en imposant que l'énergie totale pour un état \mathbf{x} soit définie par $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \mathbf{x}^T W^2 \mathbf{x}$ où W est une matrice de poids statistiques. La fonction coût est alors :

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2} \langle M(\mathbf{x}_0) - A_t, M(\mathbf{x}_0) - A_t \rangle \\ &= \frac{1}{2} (M(\mathbf{x}_0) - A_t)^T W^2 (M(\mathbf{x}_0) - A_t) \\ &= \frac{1}{2} (L\delta\mathbf{x}_0)^T W^2 (L\delta\mathbf{x}_0) \\ &= \frac{1}{2} \delta\mathbf{x}_0^T L^T W^2 E \\ &= \frac{1}{2} \delta\mathbf{x}_0^T W^2 L^* E. \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Une perturbation $\delta\mathbf{x}_0$ crée une variation dans la fonction coût :

$$\begin{aligned} \delta J &= \langle M(\mathbf{x}_0) - A_t, \delta\mathbf{x}_t \rangle \\ &= \langle M(\mathbf{x}_0) - A_t, L\delta\mathbf{x}_0 \rangle \\ &= \langle L^* [M(\mathbf{x}_0) - A_t], \delta\mathbf{x}_0 \rangle \\ &= \langle L^* E, \delta\mathbf{x}_0 \rangle. \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Puisque par définition $\delta J = \langle \nabla J(\mathbf{x}_0), \delta\mathbf{x}_0 \rangle$, le gradient de la fonction coût est :

$$\nabla J(\mathbf{x}_0) = L^* L \delta\mathbf{x}_0 = L^* E. \quad (\text{A.17})$$

A.4 Le problème adjoint

Nous allons trouver le modèle adjoint de l'équation de Burgers (Kalnay et al., 2000) :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} \quad (\text{A.18})$$

où $\bar{u} = u + \delta u$.

Si on assume que $u = u(x)$, la perturbation linéaire est :

$$\frac{\partial \delta u}{\partial t} + u \frac{\partial \delta u}{\partial x} + \delta u \frac{du}{dx} = v \frac{\partial^2 \delta u}{\partial x^2}. \quad (\text{A.19})$$

Nous allons considérer que la perturbation δu est sous forme d'onde, la série de Fourier s'écrit :

$$f(\delta u) = \sum_{k=-K}^{k=+K} C_k e^{ik\delta u} \quad (\text{A.20})$$

$$f(\delta u) = a_0 + \sum a_k \cos(k\delta u) + \sum b_k \sin(k\delta u). \quad (\text{A.21})$$

Dans notre cas, on a :

$$\delta u = A(t) \sum e^{ik(x-ut)} \quad (\text{A.22})$$

ou bien :

$$\delta u = A(t) e^{ik(x-ut)} \quad (\text{A.23})$$

si on fait la somme implicitement. En substituant (A.23) dans (A.19) et en rassemblant les termes semblables :

$$\frac{dA}{dt} + \left(\frac{du}{dx} + vk^2 \right) A = 0. \quad (\text{A.24})$$

Alors, si on résout pour $A(t)$:

$$A(t) = A_0 e^{-\left(\frac{du}{dx} + vk^2\right)t}. \quad (\text{A.25})$$

Si on substitue (A.25) dans (A.23) pour obtenir $\delta u(t)$:

$$\delta u(t) = e^{-ikut} e^{-\frac{du}{dx}t} e^{-vk^2t} \delta u(0). \quad (\text{A.26})$$

Comme $\delta u(t) = L\delta u(0)$, le modèle de la tangente linéaire ou propagateur est :

$$L = e^{-\left(\frac{du}{dx} + vk^2\right)t - ikut}. \quad (\text{A.27})$$

Si on prend le complexe conjugué de la transposée, on obtient le modèle adjoint :

$$L^* = e^{-\left(\frac{du}{dx} + vk^2\right)t + ikut}. \quad (\text{A.28})$$

En ce qui nous concerne, nous allons prendre la partie imaginaire puisque nous

allons utiliser, comme condition initiale, des sinus ayant des conditions aux limites nulles, alors L^* devient :

$$L^* = e^{-\left(\frac{du}{dx} + vk^2\right)t} \sin(kut). \quad (\text{A.29})$$

A.5 Une expérience numérique

A.5.1 L'initialisation

Premièrement, nous devons initialiser certaines constantes du problème. Nous avons pris une viscosité $\nu = 0.1 \text{ m}^2/\text{s}$. Notre condition initiale pour la simulation initiale sera $\sin(x)$ avec un domaine allant de 0 à 2π . Ce domaine a été discrétisé en 256 points de grille. Bien sûr, la perturbation initiale est nulle ($\delta u_0 = 0$) puisque nous estimons en premier lieu que notre modèle produira des résultats correspondants aux observations. Nous introduisons également un paramètre de tolérance ε qui indique l'erreur désirée entre les observations et notre simulation finale (les résultats).

La fonction coût s'écrit :

$$J = \sum_{i=1}^{N_x} \delta u_i W^2 L_i^* E_i \quad (\text{A.30})$$

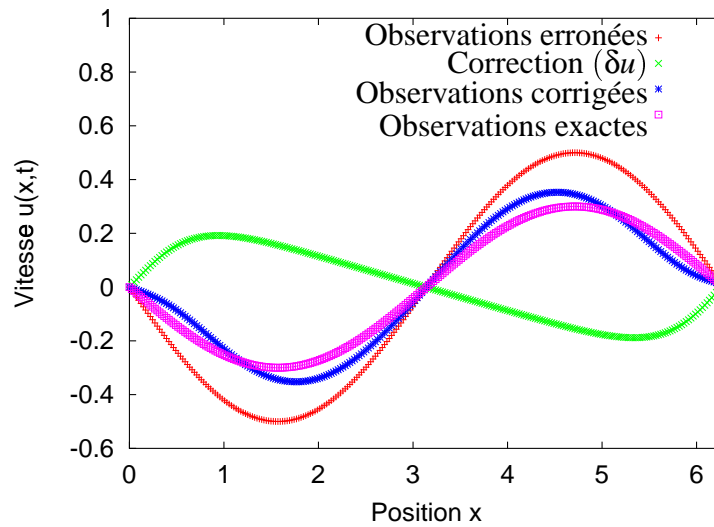
où N_x est le nombre de points de grille ($N_x=256$), L_i^* est l'adjoint de L_i , $W = 1$ et E_i est l'erreur. L'adjoint est comme dans (A.29) où $k = 2\pi$ et $\frac{du}{dx}$ est calculé par différences finies. Pour le gradient, la méthode est semblable sauf que l'on dérive J par rapport à chaque δu_i . Cela donne :

$$\nabla J_i = W^2 L_i^* E_i. \quad (\text{A.31})$$

A.5.2 Les résultats

Dans la figure (A.1), nous avons d'abord en rouge la condition initiale où nous débutons la simulation. Après la minimisation de la fonction coût, nous obtenons une correction optimale dénotée par la courbe verte. Nous obtenons les conditions initiales corrigées (courbe bleue) en additionnant les observations erronées avec la correction. Nous voyons que les observation corrigées correspondent mieux aux observations exactes (courbe mauve) que les observation erronées.

FIG. A.1 – Conditions initiales et correction



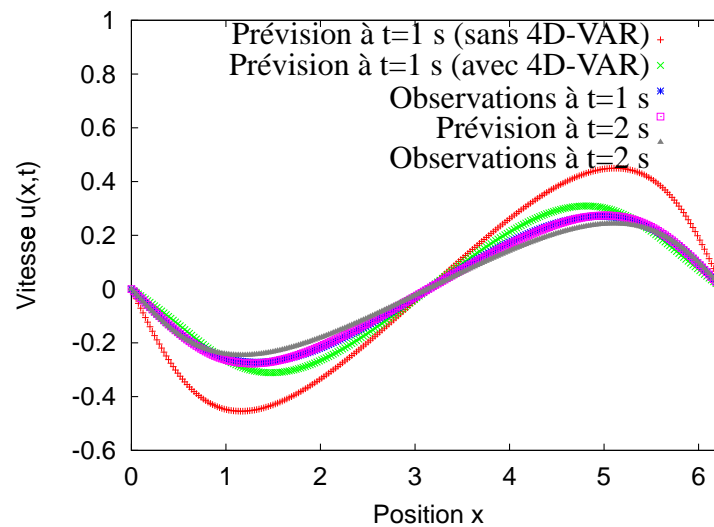
Dans la figure (A.2), nous comparons plusieurs prévisions avec les observations. Si on effectue une simulation de $t=0$ s à $t=1$ s, nous obtenons la courbe rouge qui est très éloignée des observations prises à $t=1$ s (courbe bleue). En utilisant la méthode 4D-VAR, nous obtenons la courbe verte qui est plus rapprochée des observations. Il est possible de faire, en utilisant la prévision obtenue par la méthode 4D-VAR à $t=1$ s comme condition initiale, une prévision à $t=2$ s (courbe mauve qui est superposée au observations à $t=1$ s). Enfin, la courbe grise représente les observations exactes à $t=2$ s.

Dans la figure (A.3), nous analysons les erreurs. Les courbes rouge et verte représentent l'erreur entre la prédiction et les observations à $t=1$ s. La méthode 4D-VAR nous donne une réduction de l'erreur moyenne de 76%. Quant aux courbes bleue et mauve, elles montrent l'erreur entre les observations erronées et corrigées avec les observations exactes. L'utilisation de la correction réduit l'erreur moyenne de 68%. Malgré ces réductions d'erreur plutôt élevées, nous aurions souhaité une plus petite erreur du côté de la correction apportée à $t=0$ s.

A.5.3 Coût de calcul

Au tableau (A.1), nous comparons le temps de calcul d'une simulation sans la méthode 4D-VAR avec une simulation utilisant la méthode 4D-VAR. Voici une définition des différents temps :

FIG. A.2 – Prévisions et observations

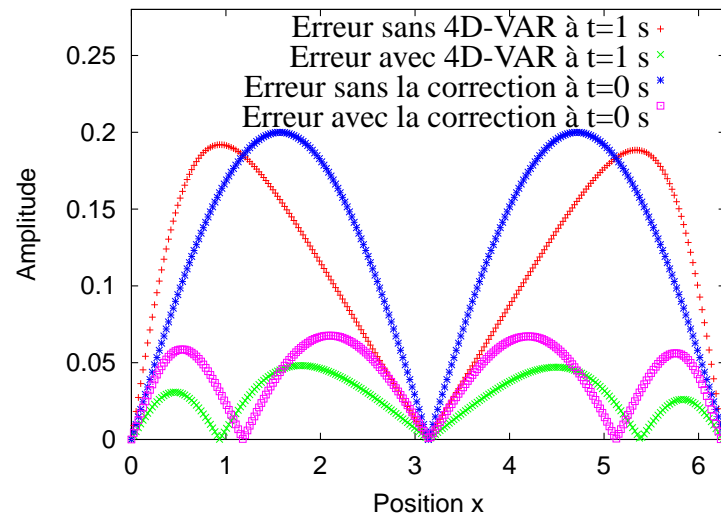


- Temps de l'utilisateur : exécution du programme
- Temps du système : exécution des ordres du système d'exploitation (entrées/sorties)
- Temps du processeur (utilisateur + système) : temps total

	Sans la méthode 4D-VAR	Avec la méthode 4D-VAR
Temps de l'utilisateur	0.12 s	1.28 s
Temps du système	0.02 s	0.04 s
Temps du processeur	0.14 s	1.32 s

TAB. A.1 – Temps de calcul

FIG. A.3 – Magnitude des erreurs des prévisions et de la correction



Annexe B

Panache thermique

Dans cette section, nous écrivons les équations pour l'assimilation de données 4D-VAR dans le cas du plume thermique localisé (fig. B.1). Pour produire un tel panache, nous avons un point de chauffe situé au centre de la frontière inférieure du contenant. Cela réchauffe le fluide (un liquide ou un gaz) dans les environs et celui-ci monte puisqu'il est plus chaud, donc plus léger, que le fluide près de la surface. Pendant la montée, il y a création de tourbillons (fig. B.1) puisque le fluide plus froid veut descendre. Un exemple d'un tel phénomène de convection serait un feu de forêt où l'on voit la fumée s'élever dans le ciel sous l'effet de l'air chaud produit par les flammes qui agissent comme un point de chauffe. Ces instabilités sont appelées convection de Rayleigh-Bénard (Tritton, 1988). Maintenant, nous allons présenter les équations physiques décrivant la convection de Rayleigh-Bénard, ensuite nous allons développer leurs adjointes. L'application de la méthode 4D-VAR serait efficace pour un intervalle de temps où le plume ne s'est pas beaucoup déformé comme c'est le cas pour les figures (B.1a) et (B.1b). L'intervalle de temps écoulé entre les figure (B.1a) et (B.1c) ou (B.1d) est trop grand. On ne reconnaît plus le plume original. Si on utilise cet intervalle pour la méthode 4D-VAR, on peut probablement s'attendre à des complications et à un important écart entre la prédiction et les observations.

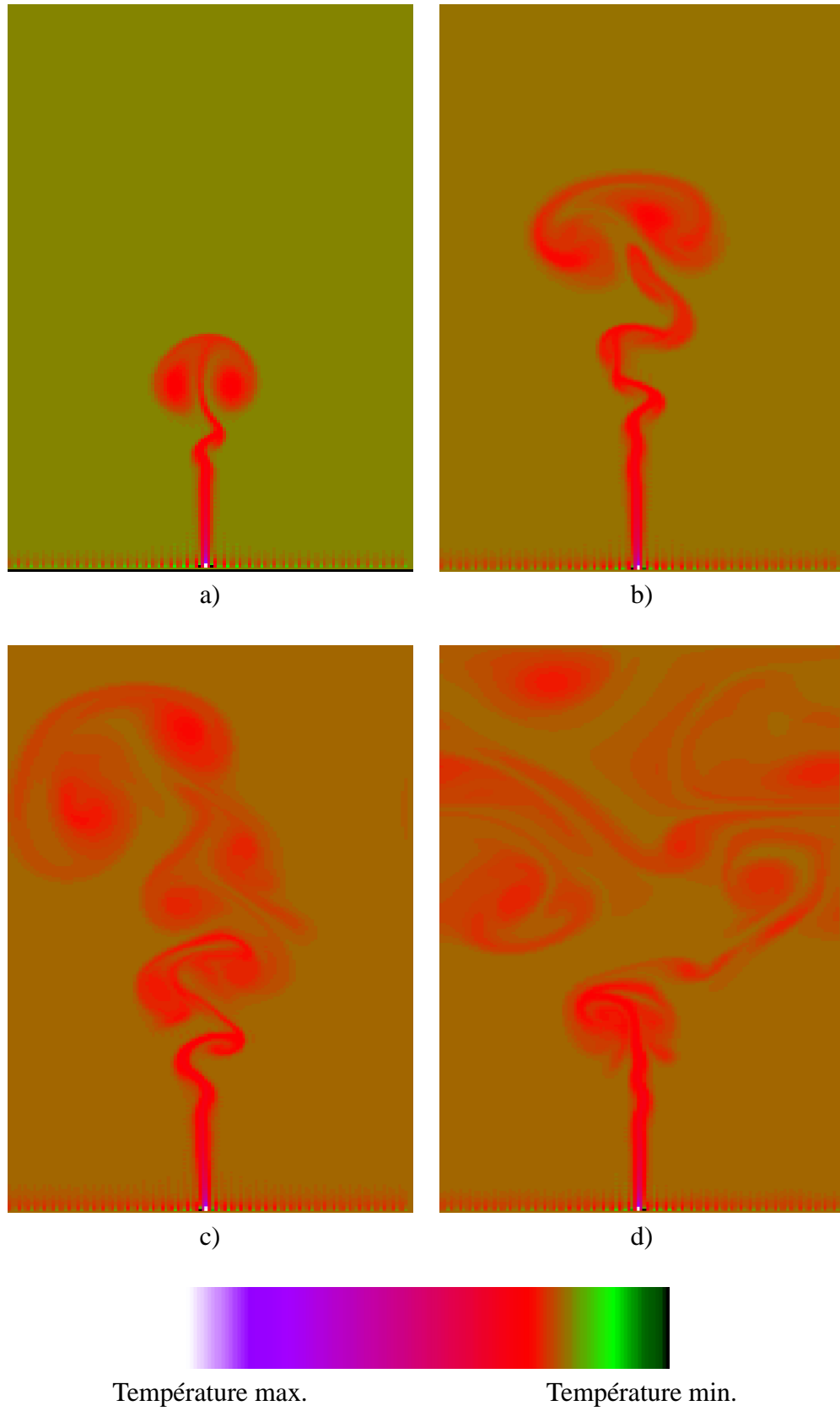


FIG. B.1 – Simulation d'un plume thermique

B.1 Les équations physiques

Les équations physiques de ce phénomène découlent des principes fondamentaux de conservation. Nous avons la conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \rho \vec{v} = 0, \quad (\text{B.1})$$

la conservation de la quantité de mouvement :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P + \nu \nabla^2 \vec{v} + \vec{g} \hat{e}_y, \quad (\text{B.2})$$

et la conservation de l'énergie thermique :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} T = \kappa \nabla^2 T. \quad (\text{B.3})$$

Nous allons simplifier ces équations en utilisant l'approximation de Boussinesq qui stipule que les propriétés physiques du fluides sont constantes. De plus, la densité est constante partout sauf aux endroits où elle crée une force gravitationnelle. L'équation d'état pour la densité est :

$$\rho = \rho_0(1 - \alpha(T - T_r)). \quad (\text{B.4})$$

Les équations adimensionnées avec la profondeur d comme échelle de longueur, le temps de diffusion thermique d^2/κ , ΔT la différence de température entre le bas et le haut s'écrivent :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \quad (\text{B.5})$$

$$\frac{1}{\text{Pr}} \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{v} \right) = -\vec{\nabla} P + \nabla^2 \vec{v} + \text{Ra} T \hat{e}_y \quad (\text{B.6})$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} T = \nabla^2 T \quad (\text{B.7})$$

où

$$\text{Pr} = \frac{\text{viscosité cinématique}}{\text{diffusivité thermique}} \quad (\text{B.8})$$

$$= \frac{\nu}{\kappa} \quad (\text{B.9})$$

et

$$\text{Ra} = \frac{\text{poussée d'Archimède}}{\text{perte par viscosité et diffusivité}} \quad (\text{B.10})$$

$$= \frac{g\alpha\Delta T d^3}{\kappa\nu} \quad (\text{B.11})$$

sont des nombres sans dimensions, le nombre de Prandtl et le nombre de Rayleigh respectivement (Tritton, 1988).

B.2 Les équations adjointes

En tenant compte de deux dimensions, nous écrivons les équations vectorielles (B.5) à (B.7) en les décomposant sous forme de leurs composantes x et y . Nous allons utiliser u pour la composante horizontale de la vitesse et v pour la composante verticale de la vitesse, i.e. $\vec{v} = (u, v)$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{B.12})$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (\text{B.13})$$

$$\frac{1}{\text{Pr}} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (\text{B.14})$$

$$\frac{1}{\text{Pr}} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial y} + u \frac{\partial v}{\partial x} \right) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \text{Ra} T \quad (\text{B.15})$$

Maintenant, nous allons réarranger ces équations en réécrivant le terme d'advection de (B.13) :

$$\begin{aligned} & u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \\ &= u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + T \frac{\partial u}{\partial x} - T \frac{\partial u}{\partial x} + T \frac{\partial v}{\partial y} - T \frac{\partial v}{\partial y} \\ &= u \frac{\partial T}{\partial x} + T \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + T \frac{\partial v}{\partial y} - T \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial(uT)}{\partial x} + \frac{\partial(vT)}{\partial y} \end{aligned}$$

Le terme contenu dans la parenthèse n'est que la divergence qui est nulle en vertu de (B.12). Nous pouvons appliquer une méthode similaire au termes d'inertie de

(B.14) et (B.15). Cette manipulation mathématique a été effectuée afin de nous simplifier la tâche lorsque nous prendrons la variation du lagrangien. Finalement, en mettant tous les termes sur le côté gauche de l'égalité, nous obtenons :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{B.16})$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial(uT)}{\partial x} + \frac{\partial(vT)}{\partial y} - \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{B.17})$$

$$\frac{1}{\text{Pr}} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} \right) + \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{B.18})$$

$$\frac{1}{\text{Pr}} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v^2}{\partial y} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} \right) + \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \text{Ra } T = 0 \quad (\text{B.19})$$

Suite aux manipulations ci-dessus, nous pouvons construire le lagrangien comme il est démontré par (2.19). Les multiplicateurs de Lagrange ou variables adjointes sont données par P^* , T^* , u^* et v^* :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \int_{\Omega} \int_{t_1}^{t_2} J + P^* \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right] \\ & + T^* \left[\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial(uT)}{\partial x} + \frac{\partial(vT)}{\partial y} - \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right] \\ & + u^* \left[\frac{1}{\text{Pr}} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} \right) + \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] \\ & + v^* \left[\frac{1}{\text{Pr}} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v^2}{\partial y} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} \right) + \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \text{Ra } T \right] dt d\vec{x} \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

où J est une fonction coût que nous choisissons. Par exemple, si on veut prédire la température T , nous avons :

$$J = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_{t_1}^{t_2} (T - T_{\text{obs}}) \mathbf{R}^{-1} (T - T_{\text{obs}}) dt d\vec{x} \quad (\text{B.21})$$

où T est la température prédite, T_{obs} est la température observée et \mathbf{R}^{-1} est une matrice contenant les covariances de l'erreur sur les observations. En multipliant les variables adjointes, nous obtenons :

$$\mathcal{L} = \int_{\Omega} \int_{t_1}^{t_2} J + P^* \frac{\partial u}{\partial x} + P^* \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\begin{aligned}
& + T^* \frac{\partial T}{\partial t} + T^* \frac{\partial(uT)}{\partial x} + T^* \frac{\partial(vT)}{\partial y} - T^* \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - T^* \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \\
& + \frac{1}{\text{Pr}} \left(u^* \frac{\partial u}{\partial t} + u^* \frac{\partial u^2}{\partial x} + u^* \frac{\partial(uv)}{\partial y} \right) + u^* \frac{\partial P}{\partial x} - u^* \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u^* \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\
& + \frac{1}{\text{Pr}} \left(v^* \frac{\partial v}{\partial t} + v^* \frac{\partial v^2}{\partial y} + v^* \frac{\partial(uv)}{\partial x} \right) + v^* \frac{\partial P}{\partial y} - v^* \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - v^* \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \\
& - \text{Ra } T v^* dt d\vec{x} \tag{B.22}
\end{aligned}$$

La prochaine étape consiste à transférer l'opérateur différentielle de la variable réelle à la variable adjointe. Cela se fait en appliquant l'intégration par parties à chaque terme du lagrangien (B.22). Nous avons donc :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} & = \int_{\Omega} \int_{t_1}^{t_2} J - u \frac{\partial P^*}{\partial x} - v \frac{\partial P^*}{\partial y} \\
& - T \frac{\partial T^*}{\partial t} - uT \frac{\partial T^*}{\partial x} - vT \frac{\partial T^*}{\partial y} - T \frac{\partial^2 T^*}{\partial x^2} - T \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^2} \\
& - \frac{u}{\text{Pr}} \frac{\partial u^*}{\partial t} - \frac{u^2}{\text{Pr}} \frac{\partial u^*}{\partial x} - \frac{uv}{\text{Pr}} \frac{\partial u^*}{\partial y} - P \frac{\partial u^*}{\partial x} - u \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} - u \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \\
& - \frac{v}{\text{Pr}} \frac{\partial v^*}{\partial t} - \frac{v^2}{\text{Pr}} \frac{\partial v^*}{\partial y} - \frac{uv}{\text{Pr}} \frac{\partial v^*}{\partial x} - P \frac{\partial v^*}{\partial y} - v \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^2} - v \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^2} \\
& - \text{Ra } T v^* dt d\vec{x} + b \tag{B.23}
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
b & = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{\text{Pr}} (uu^* + vv^*) + TT^* \right) \Big|_{t_1}^{t_2} d\vec{x} \\
& + \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{1}{\text{Pr}} (u^2 u^* + uvv^*) + uP^* + u^* P - u^* \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial u^*}{\partial x} \right. \\
& \left. - v^* \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v^*}{\partial x} + uTT^* - T^* \frac{\partial T}{\partial x} + T \frac{\partial T^*}{\partial x} \right) \Big|_{L_x}^0 \\
& + \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{1}{\text{Pr}} (v^2 v^* + uvu^*) + vP^* + v^* P - u^* \frac{\partial u}{\partial y} + u \frac{\partial u^*}{\partial y} \right. \\
& \left. - v^* \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial v^*}{\partial y} + vTT^* - T^* \frac{\partial T}{\partial y} + T \frac{\partial T^*}{\partial y} \right) \Big|_{L_y}^0 \tag{B.24}
\end{aligned}$$

Ensuite, nous utilisons l'opérateur variationnelle (2.20) pour obtenir la variationnelle du lagrangien (B.23). Le terme dépendant des conditions aux frontière

(B.24) disparaît. Nous nous retrouvons donc avec :

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{L} = & \int_{\Omega} \int_{t_1}^{t_2} \delta P \left[\frac{\partial J}{\partial P} - \frac{\partial u^*}{\partial x} - \frac{\partial v^*}{\partial y} \right] \\
& + \delta u \left[\frac{\partial J}{\partial u} - \frac{1}{\text{Pr}} \left(\frac{\partial u^*}{\partial t} + 2u \frac{\partial u^*}{\partial x} + v \frac{\partial u^*}{\partial y} + v \frac{\partial v^*}{\partial x} \right) \right. \\
& \quad \left. - \frac{\partial P^*}{\partial x} - \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} - T \frac{\partial T^*}{\partial x} \right] \\
& + \delta v \left[\frac{\partial J}{\partial v} - \frac{1}{\text{Pr}} \left(\frac{\partial v^*}{\partial t} + 2v \frac{\partial v^*}{\partial y} + u \frac{\partial v^*}{\partial x} + u \frac{\partial u^*}{\partial y} \right) \right. \\
& \quad \left. - \frac{\partial P^*}{\partial y} - \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^2} - T \frac{\partial T^*}{\partial y} \right] \\
& + \delta T \left[\frac{\partial J}{\partial T} - \frac{\partial T^*}{\partial t} - u \frac{\partial T^*}{\partial x} - v \frac{\partial T^*}{\partial y} \right. \\
& \quad \left. - \frac{\partial^2 T^*}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^2} - \text{Rav}^* \right] dt d\vec{x} \\
& + \delta b
\end{aligned} \tag{B.25}$$

où δb est :

$$\begin{aligned}
\delta b = & \int_{\Omega} \left(\frac{1}{\text{Pr}} (\delta u u^* + \delta v v^*) + \delta T T^* \right) \Big|_{t_1}^{t_2} d\vec{x} \\
& + \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{1}{\text{Pr}} (2u \delta u u^* + \delta u v v^* + u \delta v v^*) + \delta u P^* + u^* \delta P - u^* \frac{\partial \delta u}{\partial x} + \delta u \frac{\partial u^*}{\partial x} \right. \\
& \quad \left. - v^* \frac{\partial \delta v}{\partial x} + \delta v \frac{\partial v^*}{\partial x} + \delta u T T^* + u \delta T T^* - T^* \frac{\partial \delta T}{\partial x} + \delta T \frac{\partial T^*}{\partial x} \right) \Big|_{L_x}^0 \\
& + \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{1}{\text{Pr}} (2v \delta v v^* + \delta u v u^* + u \delta v u^*) + \delta v P^* + v^* \delta P - u^* \frac{\partial \delta u}{\partial y} + \delta u \frac{\partial u^*}{\partial y} \right. \\
& \quad \left. - v^* \frac{\partial \delta v}{\partial y} + \delta v \frac{\partial v^*}{\partial y} + \delta v T T^* + v \delta T T^* - T^* \frac{\partial \delta T}{\partial y} + \delta T \frac{\partial T^*}{\partial y} \right) \Big|_{L_y}^0
\end{aligned} \tag{B.26}$$

Puisque nous cherchons un minimum, nous exigeons que $\delta\mathcal{L} = 0$ et nous obtenons les équations adjointes que nous résolvons de t_2 à t_1 :

$$\frac{\partial J}{\partial P} - \frac{\partial u^*}{\partial x} - \frac{\partial v^*}{\partial y} = 0 \tag{B.27}$$

$$\frac{\partial J}{\partial u} - \frac{1}{\text{Pr}} \left(\frac{\partial u^*}{\partial t} + 2u \frac{\partial u^*}{\partial x} + v \frac{\partial u^*}{\partial y} + v \frac{\partial v^*}{\partial x} \right) - \frac{\partial P^*}{\partial x} - \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} - T \frac{\partial T^*}{\partial x} = 0 \tag{B.28}$$

$$\frac{\partial J}{\partial v} - \frac{1}{\text{Pr}} \left(\frac{\partial v^*}{\partial t} + 2v \frac{\partial v^*}{\partial y} + u \frac{\partial v^*}{\partial x} + u \frac{\partial u^*}{\partial y} \right) - \frac{\partial P^*}{\partial y} - \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^2} - T \frac{\partial T^*}{\partial y} = 0 \quad (\text{B.29})$$

$$\frac{\partial J}{\partial T} - \frac{\partial T^*}{\partial t} - u \frac{\partial T^*}{\partial x} - v \frac{\partial T^*}{\partial y} - \frac{\partial^2 T^*}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^2} - \text{Ra} v^* = 0 \quad (\text{B.30})$$

avec leur conditions initiales :

$$\begin{aligned} \delta u(x, y, t|_{t_1}) = 0 & \quad u^*(x, y, t|_{t_2}) = 0 \\ \delta v(x, y, t|_{t_1}) = 0 & \quad v^*(x, y, t|_{t_2}) = 0 \\ \delta T(x, y, t|_{t_1}) = 0 & \quad T^*(x, y, t|_{t_2}) = 0 \\ \delta P(x, y, t|_{t_1}) = 0 & \quad P^*(x, y, t|_{t_2}) = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.31})$$

et leurs conditions aux frontières :

$$\begin{aligned} u^*(0, y, t) = 0 & \quad u^*(L_x, y, t) = 0 \\ v^*(0, y, t) = 0 & \quad v^*(L_x, y, t) = 0 \\ T^*(0, y, t) = 0 & \quad T^*(L_x, y, t) = 0 \\ P^*(0, y, t) = 0 & \quad P^*(L_x, y, t) = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.32})$$

$$\begin{aligned} u^*(x, 0, t) = 0 & \quad u^*(x, L_y, t) = 0 \\ v^*(x, 0, t) = 0 & \quad v^*(x, L_y, t) = 0 \\ T^*(x, 0, t) = 0 & \quad T^*(x, L_y, t) = 0 \\ P^*(x, 0, t) = 0 & \quad P^*(x, L_y, t) = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.33})$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial u^*}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 & \quad \left. \frac{\partial u^*}{\partial y} \right|_{y=0} = 0 \\ \left. \frac{\partial v^*}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 & \quad \left. \frac{\partial v^*}{\partial y} \right|_{y=0} = 0 \\ \left. \frac{\partial T^*}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 & \quad \left. \frac{\partial T^*}{\partial y} \right|_{y=0} = 0 \\ \left. \frac{\partial u^*}{\partial x} \right|_{x=L_x} = 0 & \quad \left. \frac{\partial u^*}{\partial y} \right|_{y=L_y} = 0 \\ \left. \frac{\partial v^*}{\partial x} \right|_{x=L_x} = 0 & \quad \left. \frac{\partial v^*}{\partial y} \right|_{y=L_y} = 0 \\ \left. \frac{\partial T^*}{\partial x} \right|_{x=L_x} = 0 & \quad \left. \frac{\partial T^*}{\partial y} \right|_{y=L_y} = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.34})$$

Annexe C

Prospection électrique

Nous allons d'abord comparer la méthode 4D-VAR à une méthode d'inversion électrique. Cette étude intéresse le groupe de Géophysique industrielle du CERCA.

Contraintes Dans les deux méthodes, les équations physiques jouent le rôle de contraintes du problème de minimisation. Pour la méthode 4D-VAR, dans notre cas, ces contraintes sont les équations de Saint-Venant avec sédiments tandis que dans la méthode inverse la contrainte est l'équation de Gauss pour le champs électrique :

$$\vec{\nabla} \cdot (\sigma \vec{\nabla} V) = -I \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z - z_0) \quad (\text{C.1})$$

où σ est la conductivité électrique, V est le potentiel électrique, I est le courant électrique et δ est la fonction de Dirac (Boulangier, 2001).

Fonction à minimiser La méthode 4D-VAR nécessite la minimisation d'une fonction coût qui est la différence entre les prédictions ($\mathbf{H}\vec{\Psi}$) et les observations ($\vec{\Psi}^0$) :

$$J(\vec{\Psi}) = \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} (\mathbf{H}\vec{\Psi} - \vec{\Psi}^0)^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{H}\vec{\Psi} - \vec{\Psi}^0) d\vec{x} dt \quad (\text{C.2})$$

où \mathbf{R} est la matrice de covariance des erreurs d'observation. L'inversion électrique est faite en minimisant une fonction $L(\rho, c)$:

$$L(\rho, c) = \frac{1}{2} (\rho - \rho^0)^T Q_{\rho} (\rho - \rho^0) + c (v - a(\rho))^T Q_v (v - a(\rho)) \quad (\text{C.3})$$

où ρ est la résistivité électrique, ρ^0 est une résistivité de référence, Q_{ρ} est l'inverse de la matrice de covariance des paramètres, c est un coefficient scalaire, v est les

données observées, $a(\rho)$ est l'opérateur non-linéaire de modélisation directe et Q_v est l'inverse de la matrice de covariance des erreurs d'observation (Boulanger, 2001). Le deuxième terme de (C.3) est équivalent à (C.2) avec $Q_v \equiv \mathbf{R}^{-1}$.

Variables de contrôle Les variables de contrôle sont les variables que l'on va varier afin de résoudre le problème de minimisation. Dans la méthode 4D-VAR, les variables de contrôle sont les conditions initiales (h_0 , \vec{v}_0 et z_0 pour Saint-Venant). Quant à la méthode inverse, c'est la résistivité ($\rho = 1/\sigma$) et le coefficient scalaire c que l'on doit varier.

Senseurs Il est important de considérer les senseurs utilisés pour prendre les mesures. Dans l'application de la méthode 4D-VAR aux rivières, les senseurs sont fixes et la rivière défile. Dans la prospection, la route ou le terrain sont fixes et ce sont les senseurs que l'on déplace. En s'inspirant du principe de relativité galiléenne, nous pouvons considérer que les deux situations sont similaires, c'est-à-dire que nous pouvons supposer que la route défile sous les senseurs comme le fait la rivière.

Il est aussi possible de généraliser cet approche à d'autres méthodes de prospection géologique comme l'inversion gravimétrique (Boulanger & Chouteau, 2001) ou bien à des problèmes d'inversion touchant d'autre domaine des sciences appliquées.

Annexe D

Vectorisation du code

Nous avons vectorisé le code pour un NEC SX-5S. L'avantage de la vectorisation est le fait que l'on traite les tableaux comme étant des vecteurs et non un regroupement d'éléments. Les processeurs contiennent huit unités de calculs ce qui leur permet de calculer huit éléments de vecteur par cycle d'horloge. Cela explique la performance du calcul vectorielle. De plus, le NEC SX-5S a la capacité de faire du travail à la chaîne, plus précisément, si un calcul nécessite plus d'un cycle pour compléter, le calcul suivant peut néanmoins débiter au prochain cycle à condition qu'il ne dépende pas du calcul précédent.

Afin de bénéficier de cette performance de calcul, on doit prendre certaines précautions lorsque l'on écrit les boucles. Nous devons itérer sur l'indice qui change le moins rapidement et par pas de un. Pour un tableau $A(i,j)$ par exemple :

```
do j=1,n_y
  do i=1,n_x
    A(i,j)=B(i,j)+C(i,j)
  end do
end do
```

Cela facilite l'accès à la mémoire en évitant de sauter d'un endroit à l'autre. D'autres précautions à prendre lors de la programmation de boucle sont d'éviter les entrées-sorties, les conditions et les branchements ainsi que les appels de fonctions et de sous-routines (RQCHP, 2002).