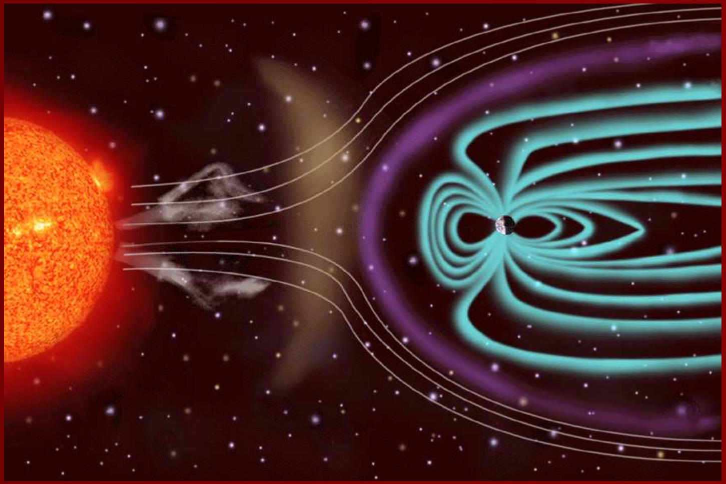
Modèles d'éruption solaire et assimilation de données

Eric Bélanger, Paul Charbonneau et Alain Vincent

Département de physique

Université de Montréal

La connexion Terre-Soleil

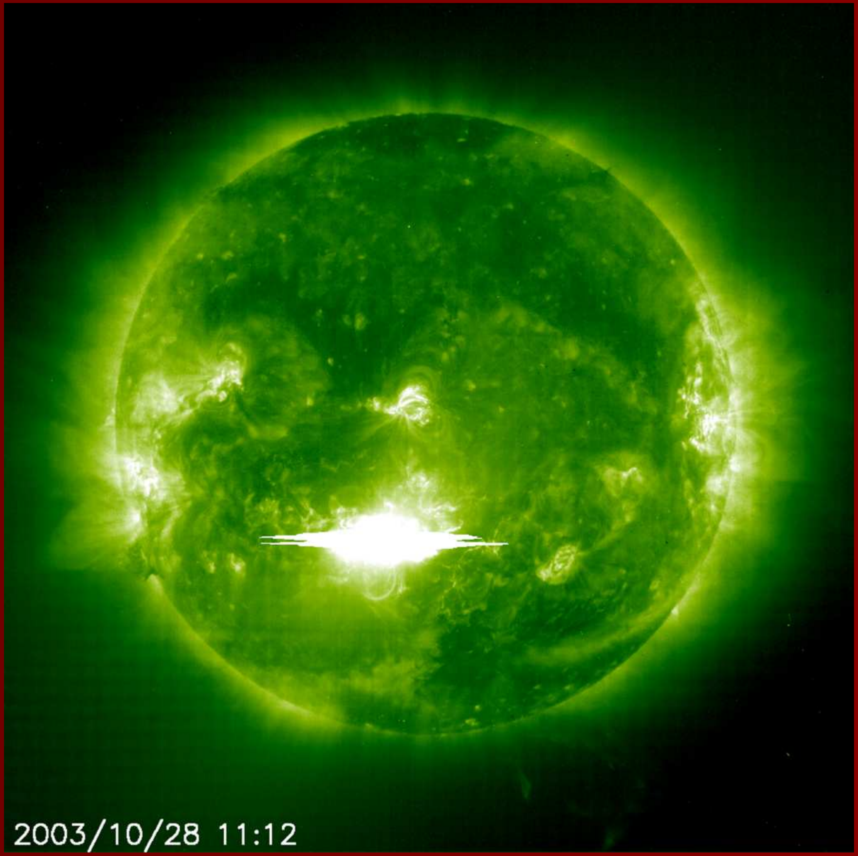


- État d'équilibre entre la magnétosphère et le vent solaire
- Éruptions solaires causent une éjection de masse coronale
- Équilibre est perturbé : $\frac{d\vec{B}}{dt} \neq 0$
- Induction d'un champ électrique : $\frac{d\vec{B}}{dt} = -\vec{\nabla} \times \vec{E}$
- Courants électriques qui circulent dans l'ionosphère et dans le sol

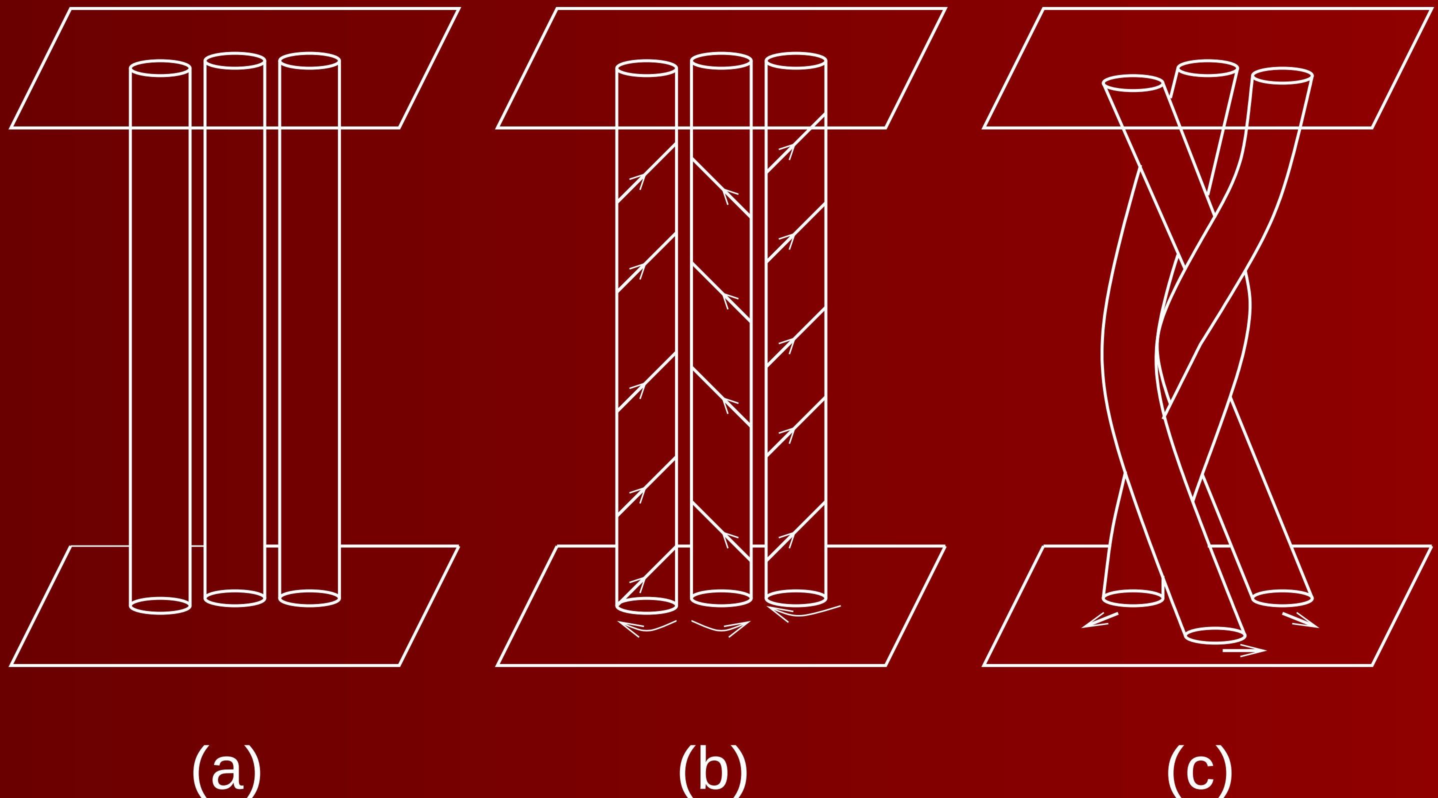
Transition Region and Coronal Explorer (TRACE)

Solar & Heliospheric Observatory (SOHO)

- Extreme Ultraviolet Imaging Telescope (EIT)
  - Émission du Fe XII (195 Å)



Entrecroisement des tubes de flux (Parker, 1983)



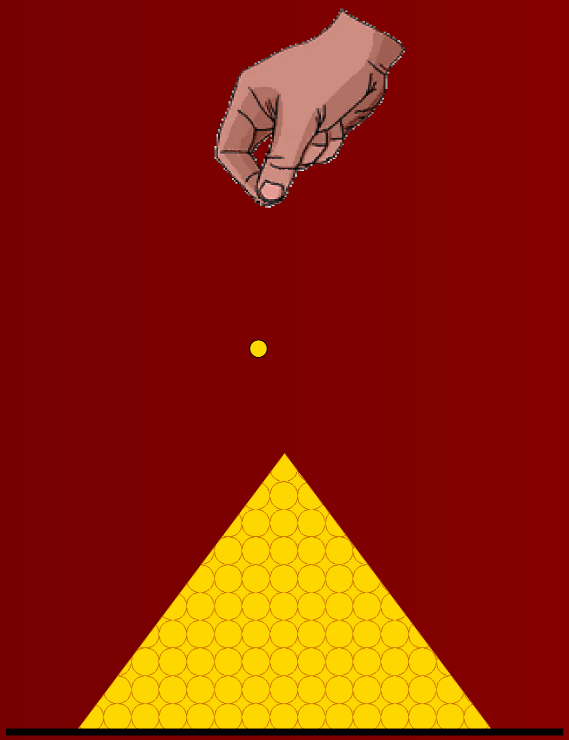
La magnétohydrodynamique

Les équations MHD (Galsgaard & Nordlund, 1996) sont :

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \rho}{\partial t} &= -\vec{\nabla} \cdot \rho \vec{v} \\
\frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} &= -\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}\vec{v} + \underline{\underline{\tau}}) - \vec{\nabla} P + \vec{J} \times \vec{B} \\
\frac{\partial e}{\partial t} &= -\vec{\nabla} \cdot (e\vec{v}) - P\vec{\nabla} \cdot \vec{v} + Q_{\mathrm{Joule}} + Q_{\mathrm{visc}} \\
\frac{\partial B}{\partial t} &= -\vec{\nabla} \times \vec{E} \\
\vec{E} &= -(\vec{v} \times \vec{B}) + \eta(\vec{r})\vec{J} \\
\vec{J} &= \vec{\nabla} \times \vec{B}
\end{aligned}
$$

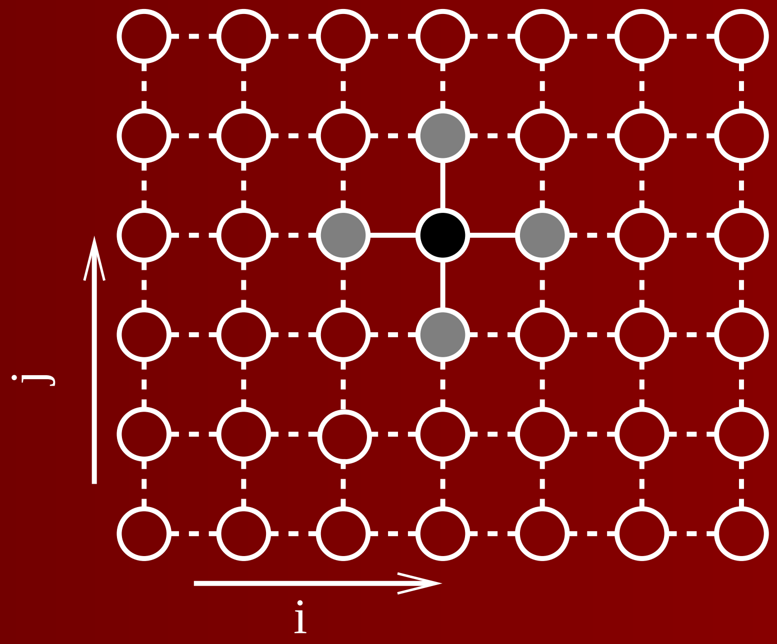
avec $P = e/(\gamma - 1)$

L'auto-organisation critique



- un système ouvert ayant un forçage externe lent
- un seuil d'instabilité se stabilisant par lui-même
- une redistribution locale d'une variable dynamique

Modèle d’avalanche



Réseau de sites métastables (Charbonneau et al., 2001)

Mécanisme d’avalanche en continu

- Critère de stabilité :

$$\Delta A^n_{i,j} \equiv A^n_{i,j} - \frac{1}{2D} \sum_{\text{voisins}} A^n_{\text{voisins}}$$

- Redistribution de A :

$$\begin{aligned} A^{n+1}_{i,j} &= A^n_{i,j} - \frac{2D}{2D+1} \Delta A^n_{i,j} \\ A^{n+1}_{i\pm1,j\pm1} &= A^n_{i\pm1,j\pm1} + \frac{1}{2D+1} \Delta A^n_{i,j} \end{aligned}$$

- Modèle d’avalanche continu :

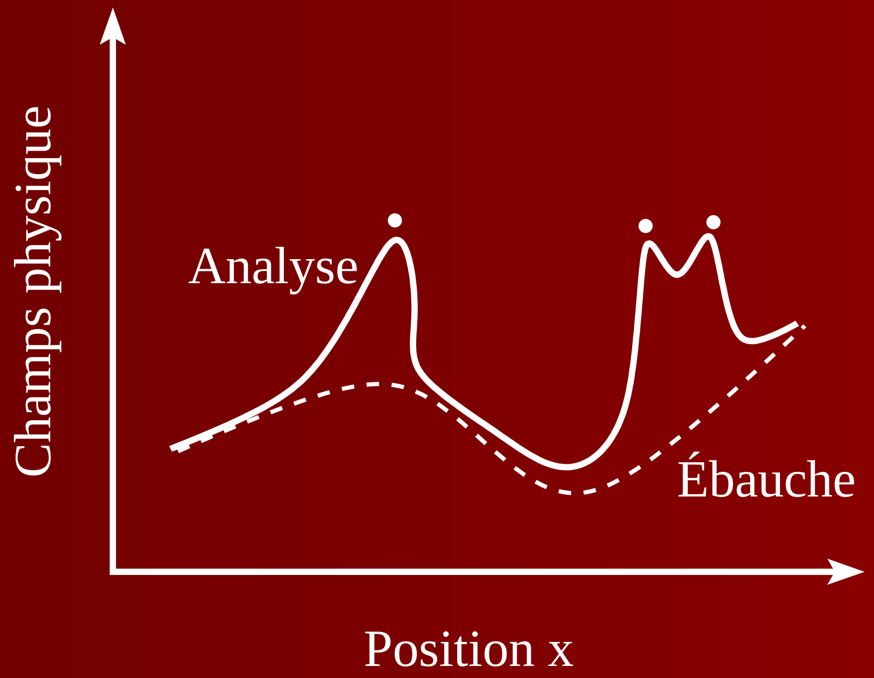
$$\frac{\partial A}{\partial t} = -\nu \frac{\partial^4 A}{\partial x^4} - \lambda \frac{\partial^2 A^3_{xx}}{\partial x^2} + F_R$$

Assimilation de données

Jusqu'à présent, nous avons considéré l'utilisation des observations satellites et des modèles théoriques et numériques pour tenter de comprendre le phénomène complexe des éruptions solaires pour être ensuite capable de pouvoir les prévoir. Un moyen efficace pour jumeler les observations avec les modèles numériques consiste à utiliser les techniques d'assimilation de données.

Les méthodes de corrections successives

$$X_a(i) = X_b(i) + w(i)E(i)$$



Les méthodes statistiques

Ces méthodes se basent sur les erreurs caractéristiques des observations et des modèles pour les combiner afin de minimiser statistiquement l'erreur de l'analyse.

- Le filtre de Kalman - met à jour les statistiques de l'erreur du modèle
- L'interpolation optimale - les statistiques de l'erreur du modèle restent constantes

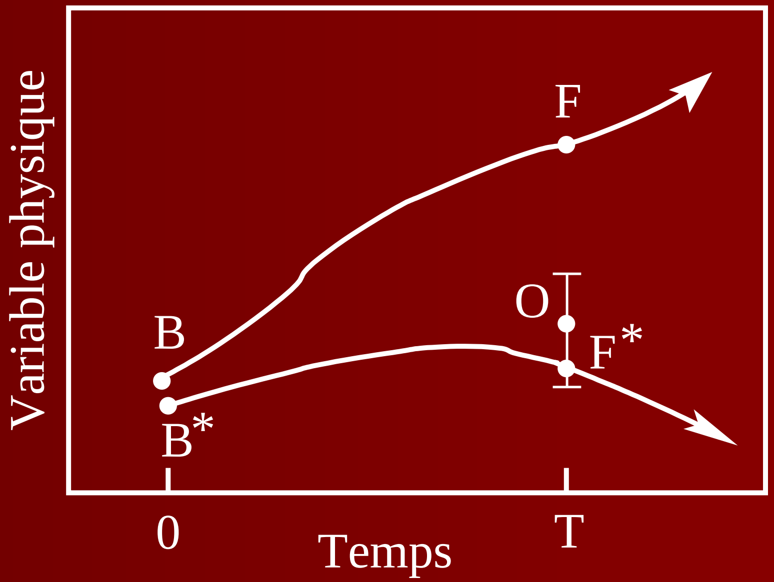
Exemple filtre de Kalman :

- X_1 Modèle
- X_2 Observation

$$X_a = X_1 + K(X_2 - X_1)$$

$$K = \frac{1}{\sigma_2^2}\left[\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}\right]^{-1}$$

Les méthodes variationnelles (Kalnay, 2003)



- B : état du système au temps 0
- F : prévision au temps T
- O : observation
- B^* : correction de l'état du système au temps 0
- F^* : nouvelle prévision au temps T

Les exposants de Lyapunov

- Dans un intervalle de temps Δt, une petite perturbation (erreur) initiale $\epsilon(\Delta t)$ croît exponentiellement :

$$\epsilon(\Delta t) \propto e^{\Lambda \Delta t}$$

  où Λ est un exposant de Lyapunov.
- $\Lambda \leq 0 \Longrightarrow$ système stable
- $\Lambda > 0 \Longrightarrow$ système instable

La fonction coût

- Généralement, la fonction coût s'écrit :

$$\mathcal{J} = \int_0^T \int_\Omega f(\overrightarrow{\Psi}, \vec{x}, t)\, d\vec{x}\, dt$$

- Plus précisément :

$$\mathcal{J} = \frac{1}{2} \int_0^T \int_\Omega (A - A_{\mathrm{obs}})\mathbf{W}(A - A_{\mathrm{obs}})\, d\vec{x}\, dt$$

  où $\mathbf{W}$ est une matrice de poids statistiques
- On veut minimiser la fonction coût $\mathcal{J}$ en obéissant à la contrainte $\mathcal{E}(\overrightarrow{\Psi}, \vec{x}, t) = 0$.

La formulation lagrangienne

- Le lagrangien s'écrit :

$$\mathcal{L}(\overrightarrow{\Psi}, \overrightarrow{\lambda}) = \mathcal{J}(\overrightarrow{\Psi}) + \int_0^T \int_\Omega \overrightarrow{\lambda}(\vec{x}, t) \cdot \mathcal{E}(\overrightarrow{\Psi}, \vec{x}, t)\, d\vec{x}\, dt$$

  où $\overrightarrow{\lambda}(\vec{x}, t)$ sont les multiplicateurs indéterminés de Lagrange aussi appelés variables adjointes (Sanders & Katopodes, 1999).
- Application de l'opérateur variationnel δ au lagrangien :

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= \overrightarrow{\nabla}_{\overrightarrow{\Psi}}\mathcal{L} \cdot \delta\overrightarrow{\Psi} + \overrightarrow{\nabla}_{\overrightarrow{\lambda}}\mathcal{L} \cdot \delta\overrightarrow{\lambda} \\ &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\overrightarrow{\Psi}}\delta\overrightarrow{\Psi} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\overrightarrow{\lambda}}\delta\overrightarrow{\lambda} \end{aligned}$$

Minimisation du lagrangien

- Minimum est atteint seulement si $\delta\mathcal{L} = 0$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \overrightarrow{\lambda}} = \mathcal{E}(\overrightarrow{\Psi}, \vec{x}, t) = 0$$

et

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \overrightarrow{\Psi}} = \text{Adj}(\overrightarrow{\lambda}) + \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \overrightarrow{\Psi}} = 0$$

où Adj$(\overrightarrow{\lambda})$ représente les équations adjointes (Schröter et al., 1993). Cet ensemble d’équations sont les équations d’Euler-Lagrange.

Équation adjointe pour le modèle d'avalanche

- Équation directe ($B \equiv A_{xx}$) :

$$\frac{\partial B}{\partial t} = -\nu \frac{\partial^4 B}{\partial x^4} - \lambda \frac{\partial^4 B^3}{\partial x^4} + F_{R_{xx}}$$

- Équation adjointe :

$$\begin{aligned} \frac{\partial B^*}{\partial \tau} &= -\nu \frac{\partial^4 B^*}{\partial x^4} - 3\lambda B^2 \frac{\partial^4 B^*}{\partial x^4} \\ &= -(\nu + 3\lambda B^2) \frac{\partial^4 B^*}{\partial x^4} \end{aligned}$$

Algorithme de la méthode du 4D-VAR