

# ASSIMILATION DE DONNÉES (4D-VAR) POUR L'ÉCOULEMENT EN EAU PEU PROFONDE : LE CAS DE LA RIVIÈRE CHICOUTIMI

Eric Bélanger, Alain Vincent,  
Alexandre Fortin

*Centre de Recherche en Calcul Appliqué (CERCA)*

*5160, boul. Décarie, bureau 400  
Montréal, QC*

*H3X 2H9*

*belanger@CERCA.UMontreal.CA*

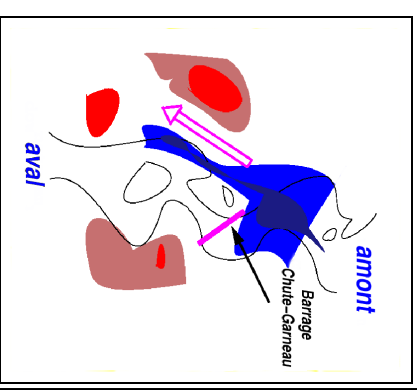
*vincent@CERCA.UMontreal.CA*

*fortina@CERCA.UMontreal.CA*

## 1 – Introduction

Le contournement du barrage de Chute-Garneau :

- 200 mm de pluie reçus en quelques jours [1]
- Accumulation d'eau au barrage
- Formation d'une incision à côté du barrage
- Nouveau chenal contournant le barrage [2]
- Catastrophe humaine [3]



### 1.1 – Problème

- Préviation hydrologique à court terme (ex : 6 heures)
- Phénomènes physiques complexes
- Conditions initiales exactes inconnues [4, 5]

### 1.2 – Solution

Le principe de l'assimilation de données variationnelle quadridimensionnelle (4D-VAR) est de trouver des conditions initiales plus pertinentes en minimisant l'erreur entre les observations et les prédictions [6, 7, 8].

### Le cas du contournement du barrage Chute-Garneau

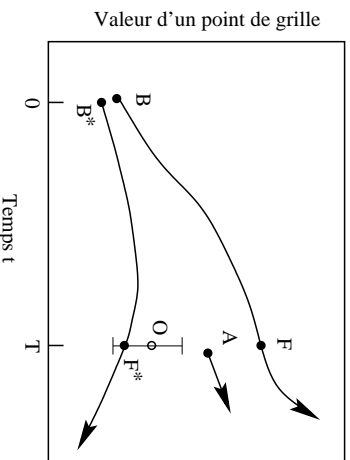
a servi de motivation pour ce travail. En juillet 1996, la région du Saguenay reçoit plus de 200 mm de pluie en quelques jours. À cause de ce déluge, le niveau d'eau de la rivière Chicoutimi augmente causant une accumulation d'eau au niveau du barrage. L'eau a accéléré l'érosion de la berge près du barrage ce qui créa une incision. La rivière s'engagea dans ce nouveau chenal pour contourner le barrage. Malheureusement, ce déluge causa de nombreuses pertes allant des infrastructures endommagées jusqu'au drame des sinistrés.

Suite à cet incident, nous nous apercevons de l'importance de pouvoir faire des prévisions hydrologiques à court terme comme un intervalle de 6 heures par exemple. Les difficultés rencontrées dans la prédiction de ces phénomènes naturels sont dues au fait qu'il faut modéliser des équations physiques complexes et surtout que nous ne connaissons pas les conditions initiales exactes du système. On peut se demander quelles seront les répercussions d'une erreur de 4 cm d'eau, soit l'effet d'une grosse pluie, dans la prédiction du niveau d'eau d'une rivière.

Une façon d'obtenir de meilleures prédictions en corrigeant ces conditions initiales erronées est d'uti-

liser l'assimilation de données variationnelle quadrimensionnelle (4D-VAR). La méthode du 4D-VAR nous permet de trouver des conditions initiales plus pertinentes de façon à minimiser l'erreur entre les observations et les prédictions. Le but de notre travail est n'est pas d'empêcher le débordement mais de les prévoir en utilisant la méthode moderne du 4D-VAR.

## 2 – Technique du 4D-VAR

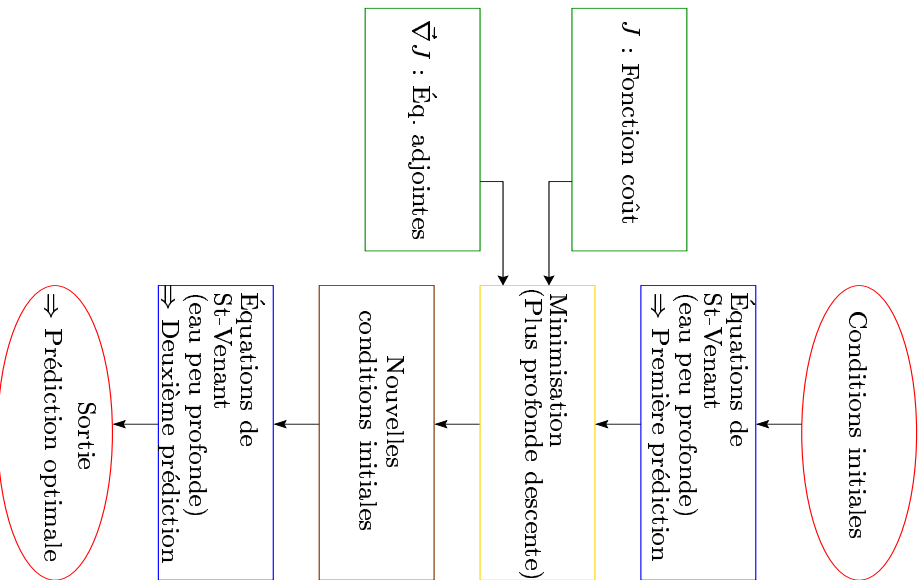


La méthode du 4D-VAR et son principe, d'après Errico (1997) [9]

- $B$  = estimation de l'état initial du système au temps 0
- $F$  = prédiction au temps  $T$
- $O$  = observation
- $F - O$  = différence entre la prédiction et l'observation système au temps 0
- $B^*$  = correction de l'estimation de l'état initial du système au temps 0
- $F^*$  = nouvelle prédiction au temps  $T$
- $A$  = état arbitraire situé entre  $F$  et  $F^*$

Cette figure présente un aperçu de la méthode du 4D-VAR. Nous allons examiner l'évolution de la valeur d'un point de grille, par exemple, une hauteur d'eau à un endroit sur un intervalle de temps  $T$ . Le point  $B$  est un estimé de la condition initiale au temps 0. En utilisant cette condition initiale, on obtient comme prédiction le point  $F$  au temps  $T$ . Comme on peut le constater, ce point se situe bien au-delà de la barre d'erreur de l'observation  $O$ . Dans la méthode du 4D-VAR, nous utilisons la différence  $F - O$ , c'est-à-dire l'erreur entre la prédiction et l'observation, pour produire une nouvelle condition initiale  $B^*$ . Si on utilise  $B^*$  comme point de départ pour notre simulation, nous obtenons la prédiction  $F^*$  qui se trouve plus près de l'observation. Enfin, pour un temps plus grand que  $T$ ,  $B^*$  donnera de meilleure prédiction que  $B$  ou que  $A$ , un point intermédiaire entre  $F$  et  $F^*$ . Ce qui est notable est qu'une petite erreur dans les conditions initiales peut s'amplifier énormément au cours du temps.

### 3 – Algorithme de la méthode 4D-VAR



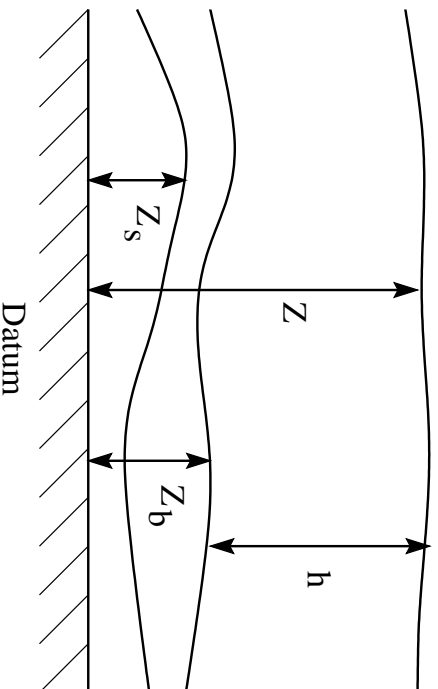
Ce diagramme indique les diverses étapes qu'il faut suivre pour pouvoir effectuer des prédictions à l'aide de la méthode 4D-VAR. Nous allons y revenir au cours de la présentation. Tout d'abord, nous débutons avec une estimation des conditions initiales que nous soumettons à une routine qui modélise les équations en eau peu profonde aussi connues sous le nom d'équations de St-Venant. Ceci dit, je vais vous présenter ces équations.

## 4 – Les équations en eau peu profonde

### avec sédiments en 1D

#### 4.1 – Niveaux de référence

- $Z$  : Hauteur totale
- $h$  : Hauteur d'eau
- $Z_b$  : Hauteur de la bathymétrie mobile (sédiments)
- $Z_s$  : Hauteur de la bathymétrie solide (roc)
- Datum : Hauteur de référence



Les équations en eau peu profonde nécessitent la définition de niveaux de référence.  $Z$  est la hauteur total : de la surface de l'eau au datum. Le datum est une hauteur de référence que nous choisissons.  $h$  est la hauteur d'eau, par exemple 8 m d'eau.  $Z_b$  est la hauteur de la bathymétrie mobile composée de sédiments.  $Z_s$  est la hauteur de la bathymétrie solide ou roc.

## 4.2 – Équations physiques

- Conservation de la masse :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hv}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

- Conservation du moment :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + g \frac{\partial Z}{\partial x} + \frac{gv^2 n^2}{h^{\frac{5}{3}}} = 0 \quad (2)$$

- Conservation de la masse pour les sédiments :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ (1-p)(Z_b - Z_s) + \frac{q_s}{v} \right] + \frac{\partial q_s}{\partial x} = 0 \quad (3)$$

où

- $q_s = av^b$  : débit des sédiments ( $a$  et  $b$  sont des constantes empiriques)
- $p$  : porosité des sédiments
- $g$  : gravité
- $n$  : coefficient de Manning [10]

Maintenant que nous avons défini les niveaux de référence, nous allons passer aux équations physiques. La première équation représente la conservation de la masse pour l'eau. Ici,  $h$  est la hauteur d'eau et  $v$  est la vitesse de l'eau. La deuxième équation est la conservation du moment. Ce terme est le terme de Manning où  $g$  est l'accélération gravitationnelle et  $n$  est le coefficient de Manning. Le terme de Manning modélise la friction entre l'eau et le fond marin. Enfin, cette équation est la conservation de la masse pour les sédiments.  $p$  est la porosité des sédiments et  $q_s$  est le débit des sédiments.  $q_s$  est donné par  $av^b$ .  $a$  et  $b$  sont des constantes empiriques qui dépendent de la nature des sédiments.

RETOUR À L'ALGORITHME :

En utilisant les équations en eau peu profonde, on peut faire une première prédiction. La méthode du 4D-VAR nécessite la définition d'une fonction coût et de son gradient.

## 5 – La fonction coût

La forme générale de la fonction coût, que l'on cherche à minimiser, est :

$$J = \int_{\Omega} \int_0^T f(\Psi, \vec{x}, t) d\vec{x} dt \quad (4)$$

où  $f(\Psi, \vec{x}, t)$  est une fonction scalaire définie pour un intervalle de temps  $[0, T]$  et un domaine  $\Omega$ .  $f(\Psi, \vec{x}, t)$  est un modèle du problème à résoudre [11].

La fonction coût peut avoir différentes formes :

- En **assimilation de données** (météorologie et océanographie), la fonction coût mesure l'erreur entre la prédiction et les observations [7] :

$$J = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_0^T W(M(\Psi_0) - A_t)^2 d\vec{x} dt \quad (5)$$

- En **contrôle optimal** (industrie aéronautique : conception de profils d'aile d'avion), la fonction coût peut modéliser le coefficient de traînée, le ratio portée-traînée et/ou la distribution de pression ciblée [12].

Lorsqu'on utilise les méthodes variationnelles, il faut construire une fonction coût que l'on cherchera à minimiser. Généralement, nous avons l'intégrale sur un domaine  $\Omega$  et un intervalle de temps  $T$  d'une fonction scalaire. Cette fonction scalaire est une fonction de  $\Psi$  qui représente les variables physiques comme par exemple la hauteur d'eau ou la vitesse, ainsi que de la position et du temps. Selon le problème à résoudre, nous choisissons une fonction appropriée.

Par exemple, en assimilation de données, utilisée notamment en météorologie et en océanographie, nous sommes intéressé à minimiser l'erreur entre la prédiction et les observations. Voici la fonction coût utilisée.  $W$  est une matrice de poids statistiques contenant les erreurs des observations, autrement dit,  $W$  est la fraction signal/bruit.  $M(\Psi_0)$  est un opérateur modélisant l'évolution du système de l'état initial  $\Psi_0$  vers un état final  $\Psi_t$ . Dans notre cas, l'opérateur  $M$  représente les équations en eau peu profonde.  $A_t$  sont les observations ou analyses prises au temps  $t$ . Bref, le terme dans la parenthèse est tout simplement l'erreur entre la prédiction et les observations. L'erreur est au carré puisque c'est sa magnitude que nous voulons réduire et, pour des raisons techniques, le carré est plus facile à manipuler que les valeurs absolues.

D'un autre côté, la fonction coût joue également un rôle en contrôle optimal. Le contrôle optimal est utilisé par l'industrie aéronautique dans la conception de profils d'aile d'avion. Ce qu'on veut minimiser est la friction de l'air sur l'aile. La fonction coût prend alors la forme du coefficient de traînée, le ratio portée-traînée et/ou la distribution de pression ciblée.

Dans notre cas, nous allons prendre :

$$J = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N W_i (h(\mathcal{T})_i - h_i^{\text{obs}})^2 \quad (6)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N W_i E(h)_i^2 \quad (7)$$

avec

- $N$  : le nombre de points de grille
- $W_i = 1$
- $E(h)$  : l'erreur dans la hauteur d'eau

Plus particulièrement, nous allons seulement considérer la hauteur d'eau pour la fonction coût parce que cette quantité est facilement mesurable et qu'elle est importante dans les débordements de rivières. Nous avons remplacé l'intégrale par une somme puisque nous avons discrétisé le problème en utilisant  $N$  points de grille. Avec  $W_i = 1$ , tous les points ont le même poids.

**RETOUR À L'ALGORITHME :**

Maintenant que nous avons choisi notre fonction coût, Nous allons trouver son gradient parce que la plupart des méthodes de minimisation ont besoin du gradient.

## 6 – Le gradient de la fonction coût

### 6.1 – Pourquoi utiliser des équations

#### adjointes ?

Nous avons vu que la fonction coût est :

$$J = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_0^T W(M(\Psi_0) - A_t)^2 d\vec{x} dt. \quad (8)$$

Ce qui est équivalent à :

$$J = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_0^T W(\Psi_t - A_t)^2 d\vec{x} dt \quad (9)$$

puisque  $M(\Psi_0) = \Psi_t$ .

Nous avons alors  $J = J(\Psi_t)$ .

Pour la minimisation, nous voulons  $\vec{\nabla}_{\Psi_0} J$  et non  $\vec{\nabla}_{\Psi_t} J$ .

Les équation adjointes sont la meilleure façon de trouver  $\vec{\nabla}_{\Psi_0} J$  [6].

À première vue, il semblerait que pour trouver le gradient de la fonction coût, il suffirait de simplement prendre sa dérivée. Alors, pourquoi se préoccuper de ces équations adjointes ? La raison est la suivante : puisque les solutions des équations sont entièrement déterminées par les conditions initiales, on peut dire que la fonction coût est une fonction des prédictions seulement. Malheureusement, nous avons besoin du gradient par respect des conditions initiales puisque ce sont elles que nous allons modifier pendant le processus de minimisation. La meilleure façon de trouver ce gradient est d'utiliser les équations adjointes. Nous allons dériver les équations adjointes à partir d'une formulation lagrangienne.

## 6.2 – Les équations adjointes

La formulation par multiplicateurs indéterminés de Lagrange nécessite la construction du lagrangien :

$$\mathcal{L} = \int_{\Omega} \int_0^T J + \sum_{i=1}^n \lambda_i(\vec{x}, t) \mathcal{E}_i(\Psi, \vec{x}, t) dt d\vec{x} \quad (10)$$

où  $J$  est la fonction coût,  $\lambda_i(\vec{x}, t)$  sont les multiplicateurs indéterminés et  $\mathcal{E}_i(\Psi, \vec{x}, t)$  sont les équations physiques.

Puisque  $\mathcal{E}_i(\Psi, \vec{x}, t) = 0$ , une minimisation de  $\mathcal{L}$  équivaut une minimisation de  $J$  [1].

- Le lagrangien pour les équations en eau peu profonde en ID est :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \int_0^T \int_{\Omega} J + h^* [h_t + (hv)_x] \\ & + v^* [v_t + (1/2)v_x^2 + gh_x + gz_x + gv^2 n^2 / h^{\frac{4}{3}}] \\ & + z^* [(1-p)z_t + a(v^{b-1})_t + av_x^b] dx dt \quad (11) \end{aligned}$$

où  $h^*$ ,  $v^*$  et  $z^*$  sont les multiplicateurs de Lagrange  $\lambda_i$  ou variables adjointes.

Les méthodes variationnelles demandent une fonctionnelle que l'on doit minimiser. Habituellement, la fonctionnelle que l'on utilise est le lagrangien. Cette équation est le lagrangien de notre système. Le lagrangien consiste en la fonction coût à laquelle on additionne les équations physiques  $\mathcal{E}_i(\Psi, \vec{x}, t)$  multipliées par un multiplicateur indéterminé  $\lambda_i(\vec{x}, t)$ . Les équations physiques sont les contraintes du système. Notons que puisque  $\mathcal{E}_i(\Psi, \vec{x}, t) = 0$ , le terme de la somme s'annule et nous avons que le lagrangien est égal à la fonction coût. Or, une minimisation de  $\mathcal{L}$  est équivalente à une minimisation de  $J$ .

Maintenant, nous allons passer de l'abstrait au concret en écrivant le lagrangien pour les équations en eau peu profonde en une dimension. Pour simplifier la notation, les dérivées partielles seront notées par un indice. Nous avons la fonction coût  $J$  plus  $h^*$  fois l'équation de la conservation de la masse, plus  $v^*$  fois l'équation de la conservation du moment, plus  $z^*$  fois l'équation de la conservation pour les sédiments. Les  $h^*$ ,  $v^*$  et  $z^*$  sont les multiplicateurs de Lagrange  $\lambda_i$  qui sont aussi appelés variables adjointes.

- On utilise l'intégration par parties pour passer la dérivée de la variable réelle à la variable adjointe.

En prenant le premier terme comme exemple :

$$\int_0^T \int_0^L h_t h^* dx dt = \int_0^T h^* h|_0^T dx - \int_0^T \int_0^L h h_t^* dx dt$$

Nous obtenons :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \int_0^T \int_0^L J - h h_t^* - h v h_x^* - v v_t^* \\ & - (1/2) v^2 v_x^* - g h v_x^* - g z v_x^* + g v^2 n^2 v^* / h^{\frac{4}{3}} \\ & - (1-p) z z_t^* - a v^{b-1} z_t^* - a v^b z_x^* dx dt \\ & + \int_0^L [h^* h + v^* v + z^* ((1-p)z + a v^{b-1})]_0^T dx \\ & + \int_0^T [h^* h v + v^* ((1/2)v^2 + g h + g z) \\ & + z^* a v^b]_0^T dt \end{aligned} \quad (12)$$

Après avoir multiplié les termes des équations par leurs variables adjointes respectives, nous voulons transférer les dérivées des variables physiques aux variables adjointes. L'intégration par parties nous permet d'accomplir cela.

Preons le premier terme comme exemple. Après avoir appliqué l'intégration par parties, on remarque un moins qui apparaît devant le nouveau terme contenant la dérivée et un terme dépendant des conditions aux frontières. En répétant pour les autres termes, on obtient cette équation.

- Pour trouver les points stationnaires (minima, maxima, point de selle), nous appliquons au lagrangien l'opérateur variationnel  $\delta$  qui explore le voisinage d'un point.

Alors,

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h} \delta h + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v} \delta v + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} \delta z$$

Donc,

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} = & \int_0^T \int_0^L \delta h [J_h - h_t^* - v h_x^* - g v_x^* \\ & - (4/3) g v^2 n^2 v^* / h^{\frac{7}{3}}] + \delta v [J_v - h h_x^* - v_t^* - v v_x^* \\ & + 2 v g n^2 v^* / h^{\frac{4}{3}} - a(b-1)v^{b-2} z_t^* - a b v^{b-1} z_x^*] \\ & + \delta z [J_z - g v_x^* - (1-p)z_t^*] dx dt \\ & + \int_0^L [h^* \delta h + v^* \delta v + z^* ((1-p)\delta z \\ & + a(b-1)v^{b-2}\delta v)] \Big|_0^T dx + \int_0^T [h^*(v\delta h + h\delta v) \\ & + v^*(v\delta v + g\delta h + g\delta z) + a b v^{b-1} z^* \delta v] \Big|_0^T dt \quad (13) \end{aligned}$$

- Pour un déplacement  $(\delta h, \delta v, \delta z)$  arbitraire, nous nous trouvons à un minimum seulement si  $\delta \mathcal{L} = 0$ .

Puisque nous voulons minimiser le lagrangien, nous devons trouver ses points stationnaires qui peuvent être des minima, maxima, ou points de selle. L'opérateur variationnel  $\delta$  sert à décrire le comportement d'une fonction près d'un point quelconque à l'aide d'un déplacement virtuel  $(\delta h, \delta v, \delta z)$ . Ici, les directions de déplacement sont les variables physique du système. En prenant la variation du lagrangien, on obtient cette équation.

Il faut noter que du même coup, nous avons linéarisé notre problème.

Nous sommes à un minimum si  $\delta \mathcal{L} = 0$ . Pour un déplacement arbitraire  $(\delta h, \delta v, \delta z)$ , les termes entre parenthèses carrées doivent être égaux à zéro pour obtenir  $\delta \mathcal{L} = 0$ . Cela indique que la dérivée du lagrangien par rapport à chaque direction doit être nulle. Les équations obtenues sont les équations adjointes.

- Les équations adjointes sont alors :

$$h_\tau^* - v h_x^* - g v_x^* - (4/3) g v^2 n^2 v^* / h^{\frac{7}{3}} + J_h = 0 \quad (14)$$

$$\begin{aligned} v_\tau^* &- h h_x^* - v v_x^* + 2 \alpha g n^2 v^* / h^{\frac{4}{3}} \\ &+ a(b-1)v^{b-2}z_\tau^* - abv^{b-1}z_x^* + J_v = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

$$(1-p)z_\tau^* - g v_x^* + J_z = 0 \quad (16)$$

où la variable  $\tau = T - t$  est l'inverse du temps.

Nous avons comme **conditions initiales** :

$$h^*(x, \tau = 0) = v^*(x, \tau = 0) = z^*(x, \tau = 0) = 0$$

$$\delta h(x, t = 0) = \delta v(x, t = 0) = \delta z(x, t = 0) = 0$$

et comme **conditions aux frontières** [4] :

$$h^*(x = 0, \tau) = v^*(x = 0, \tau) = z^*(x = 0, \tau) = 0$$

$$h^*(x = L, \tau) = v^*(x = L, \tau) = z^*(x = L, \tau) = 0.$$

- Le gradient de la fonction coût sera déterminé par :

$$\vec{\nabla} J_{h_0} = h^*(x, \tau = T)$$

$$\vec{\nabla} J_{v_0} = v^*(x, \tau = T)$$

$$\vec{\nabla} J_{z_0} = z^*(x, \tau = T)$$

Nous avons donc les équations adjointes et  $\tau = T - t$  est l'inverse du temps. Nous choisissons les conditions initiales et les conditions aux frontières de façon à ce que les deux dernières intégrales dans  $\delta \mathcal{L}$  soient nulles.

Enfn, le gradient de la fonction coût par respect de la hauteur initiale sera donné par la valeur de la variable adjointe  $h^*$  évaluée à  $\tau = T$ . Nous avons la même chose pour les autres variables  $v$  et  $z$ .

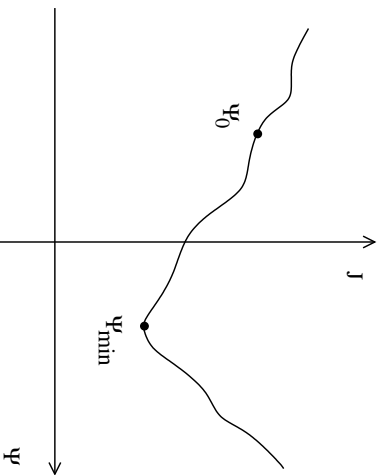
RETOUR À L'ALGORITHME :

Nous venons de définir la fonction coût que nous voulons minimiser et nous avons trouvé son gradient à l'aide des équations adjointes. Maintenant, nous allons voir comment cette fonction sera minimisée. Nous allons expliquer une des méthodes de minimisation les plus simples, soit la plus profonde descente.

## 7 – Minimisation

Algorithme de la plus profonde descente [13] :

1. On évalue  $J$  au point initial  $\Psi_0$ .
2. On trouve la direction où  $J$  décroît le plus ( $-\vec{\nabla} J$ ).
3. On avance dans cette direction avec une certaine distance  $\alpha$ .
4. On évalue  $J$  au nouveau point  $\Psi_{\text{tmp}}$ .
5. a) Si  $J(\Psi_{\text{tmp}}) < J(\Psi_0)$ , on prend  $\Psi_1 = \Psi_{\text{tmp}}$  et on retourne à l'étape 2.  
b) Si  $J(\Psi_{\text{tmp}}) > J(\Psi_0)$ , on refuse  $\Psi_{\text{tmp}}$  et on recommence l'étape 3 avec un  $\alpha$  plus petit.
6. On itère jusqu'à ce que le gradient atteigne la valeur souhaitée.



Pour la simplicité, nous allons expliquer la méthode de la plus profonde descente pour une fonction coût à une dimension. D'abord, nous évaluons la fonction coût à un point initial  $\Psi_0$ . Ensuite, nous devons trouver la direction où  $J$  décroît le plus. Cette direction est le sens inverse du gradient que nous venons de définir dans la section précédente. Nous avançons dans cette direction avec un pas  $\alpha$  et nous évaluons la fonction coût à cette nouvelle position. Si la fonction coût a diminué, ce nouveau point est accepté et on retourne à l'étape 2. D'un autre côté, si la fonction coût a augmenté, le nouveau point est refusé. Dans ce cas, on diminue le pas  $\alpha$  et on retourne à l'étape 3. On continue jusqu'à ce que le gradient atteigne la valeur souhaitée.

**RETOUR À L'ALGORITHME :**

Suite à la minimisation de la fonction coût, nous avons des nouvelles conditions initiales, soit les conditions initiales qui minimisent l'erreur entre la prédiction et les observations.

Nous utilisons ces conditions initiales dans une nouvelle simulation pour faire une deuxième prédiction.

Comme sortie, nous avons une prédiction optimale.

## 8 – Les équations en eau peu profonde

### et leurs adjointes en 2D

Les équations en eau peu profonde sont [14] :

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (H\vec{V}) = 0 \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \eta \hat{N} \times ((H + Z_b)g\vec{V}) \\ + \vec{\nabla} \cdot \left( (H + Z_b)g + \frac{\vec{V} \cdot \vec{V}}{2} \right) \end{aligned}$$

$$+ \frac{gn^2 \|\vec{V}\| \vec{V}}{H^{\frac{4}{3}}} = 0 \quad (18)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ (1-p)Z_b + \frac{\|\vec{q}_s\|}{\|\vec{V}\|} \right] + \vec{\nabla} \cdot \vec{q}_s = 0. \quad (19)$$

où

- $\eta = \frac{\vec{\nabla} \times \vec{V}}{(H+Z_b)g}$  : vorticité potentielle
- $g$  : gravité
- $n$  : coefficient de Manning
- $p$  : porosité des sédiments
- $q_s = \frac{a\|\vec{V}\|^2}{H^b}$  : débit des sédiments ( $a$  et  $b$  sont des constantes empiriques)

Voici les équations en eau peu profonde en deux dimensions.

Il y a la conservation de la masse, la conservation du moment et la conservation de la masse pour les sédiments.

Dans l'équation de la conservation du moment, la vorticité potentielle  $\eta$  est égale à  $\frac{\vec{\nabla} \times \vec{V}}{(H+Z_b)g}$ .  $\hat{N}$  est le vecteur normal unitaire. Ce terme est le terme de Manning.

Dans l'équation de la conservation de la masse pour les sédiments,  $Z_b$  est ici l'épaisseur de la couche de sédiments. Pour le débit des sédiments, nous avons pris  $q_s = \frac{a\|\vec{V}\|^2}{H^b}$ .

Dans notre modèle, nous allons négliger les effets des eaux souterraines. Nous avons discrétisé ces équations à l'aide d'un schéma connu qui utilise les différences finies centrées sur une grille équi-répartie.

En suivant la méthode présentée pour le cas en 1D, nous trouvons que les équations adjointes sont :

$$\begin{aligned}
h_\tau^* & - uh_x^* - vh_y^* - g(u_x^* + v_y^*) - \frac{ab}{h^{b+1}} \sqrt{\frac{u^4 + v^4}{u^2 + v^2}} z_\tau^* \\
& - \frac{4gn^2}{3} \frac{gn^2}{h^{\frac{7}{3}}} \sqrt{u^2 + v^2} (uu^* + vv^*) \\
& + \frac{ab}{h^{b+1}} (u^2 z_x^* + v^2 z_y^*) + J_h = 0
\end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned}
u_\tau^* & - hh_x^* - uu_x^* + wv^* - uv_y^* + \frac{au}{h^b} Cz_\tau^* - \frac{2au}{h^b} z_x^* \\
& + \frac{u^* gn^2}{h^{\frac{4}{3}}} \frac{2u^2 + v^2}{\sqrt{u^2 + v^2}} + v^* \frac{gn^2 vu}{h^{\frac{4}{3}}} \sqrt{u^2 + v^2} \\
& + J_u = 0
\end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}
v_\tau^* & - hh_y^* - vv_y^* - wu^* - vv_y^* + \frac{av}{h^b} Cz_\tau^* - \frac{2av}{h^b} z_y^* \\
& + \frac{v^* gn^2 vu}{h^{\frac{4}{3}}} \sqrt{u^2 + v^2} + v^* \frac{gn^2}{h^{\frac{4}{3}}} \frac{u^2 + 2v^2}{\sqrt{u^2 + v^2}} \\
& + J_v = 0
\end{aligned} \tag{22}$$

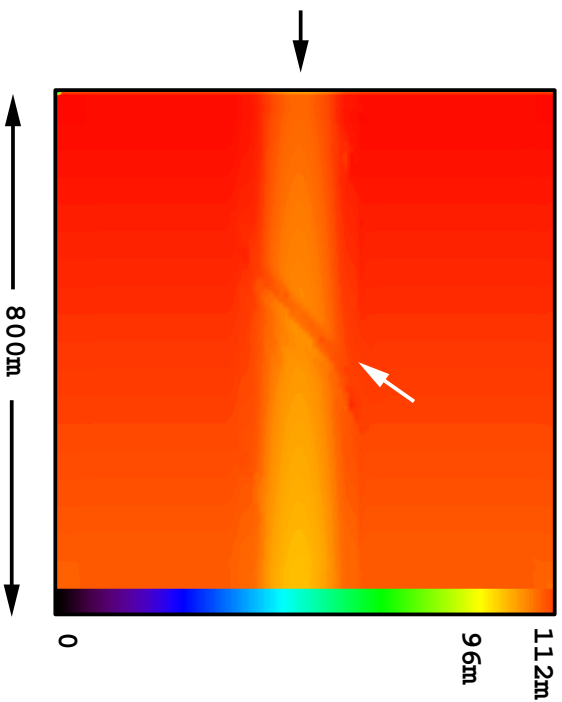
$$(1-p)z_\tau^* - g(u_x^* + v_y^*) + J_z = 0 \tag{23}$$

avec  $w = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}$ ,  $C = \frac{u^4 + 2u^2 v^2 - v^4}{(u^2 + v^2)^2} \sqrt{\frac{u^2 + v^2}{u^4 + v^4}}$  et  $\tau = T - t$ .

Pour obtenir les équations adjointes en deux dimensions, il suffit de suivre la même procédure qu'en une dimension. Nous avons donc l'équation pour  $h^*$ , celle pour  $u^*$ , celle pour  $v^*$  et celle pour  $z^*$ . Notons que  $w$  est le rotationnel de la vitesse,  $C$  est égal à une constante et  $\tau$  est l'inverse du temps.

## 9 – Résultats

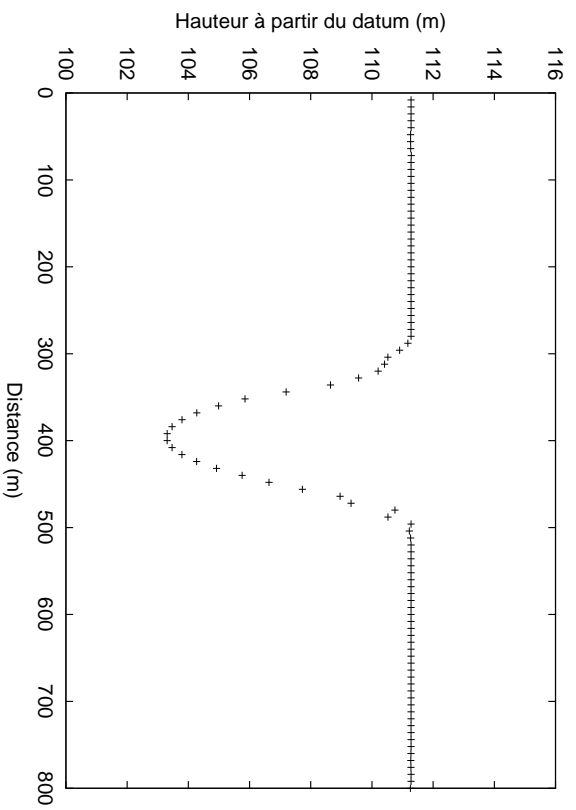
### 9.1 – Bathymétrie du problème



Voici la bathymétrie utilisée pour l'expérience que nous avons effectuée. Selon l'échelle de couleur, l'orange foncé correspond à une bathymétrie maximale tandis que le jaune correspond à une bathymétrie moins élevée. Le dégradé montre que nous avons donc un terrain en pente traversé d'une rivière en son milieu. La région à l'étude a une aire de 800 m par 800 m. Le courant entre par ce côté avec une vitesse de 6 m/s. La flèche blanche indique l'emplacement du barrage.

17-1

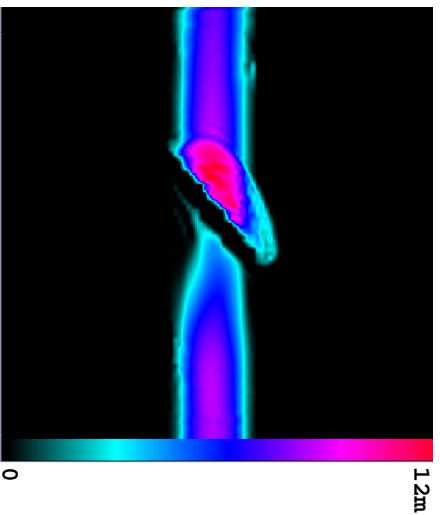
### Forme de la rivière



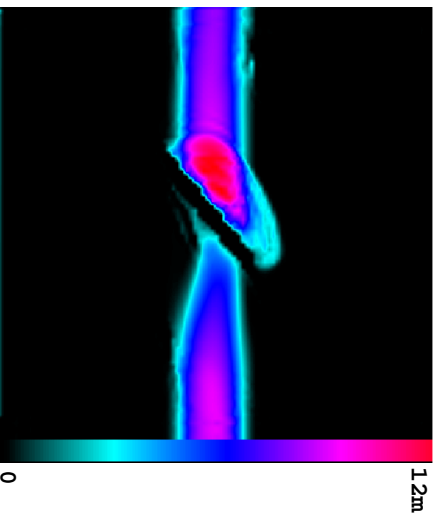
Voici une coupe transversale de la rivière. Pour notre rivière, nous avons choisi une forme simple avec de l'érosion près de la rive. La rivière a une profondeur d'environ 8 m et une largeur de 160 m.

## 9.2 – Contournement d'un barrage

Hauteur d'eau  
 $t=0$



Hauteur d'eau  
 $t=2 \text{ min.}$



Nous avons fait une simulation où l'on voit la progression d'un début de contournement. Sur cette échelle, le rouge indique une hauteur d'eau maximale de 12 m et le noir indique une absence d'eau. La première photo est la hauteur d'eau initiale et la deuxième photo montre la hauteur d'eau 2 minutes plus tard.

Nous voyons le début d'un contournement ainsi que la rivière qui commence à se vider en aval du barrage.

Après 2 minutes, l'eau s'est avancée de quelques mètres plus loin sur la rive. C'est difficile de le voir sur ces photos. Nous avons seulement fait une simulation pour deux minutes parce que cet intervalle de temps est suffisant pour les expériences que nous avons menées.

Dans un des tests que nous avons effectués, nous avons fait une simulation où nous avons négligé 4 cm d'eau. Comme il est tombé environ 20 cm de pluie en 36 heures, 4 cm d'eau représentaient quelques heures de pluie. Nous voulions voir quel serait l'effet de cette erreur dans les conditions initiales.

19-1

### 9.3 – Fonction coût

Minimisation de la fonction coût :

$$J_0 = 8.617243 \text{ m}^2$$

$$J_1 = 2.124363 \text{ m}^2$$

$$J_2 = 2.124304 \text{ m}^2$$

$$J_3 = 2.124227 \text{ m}^2$$

Nombre d'itérations : 3

Nombre d'évaluations de  $J$  : 83

Nombre d'évaluations de  $\vec{\nabla} J$  : 3

### 9.4 – Les erreurs

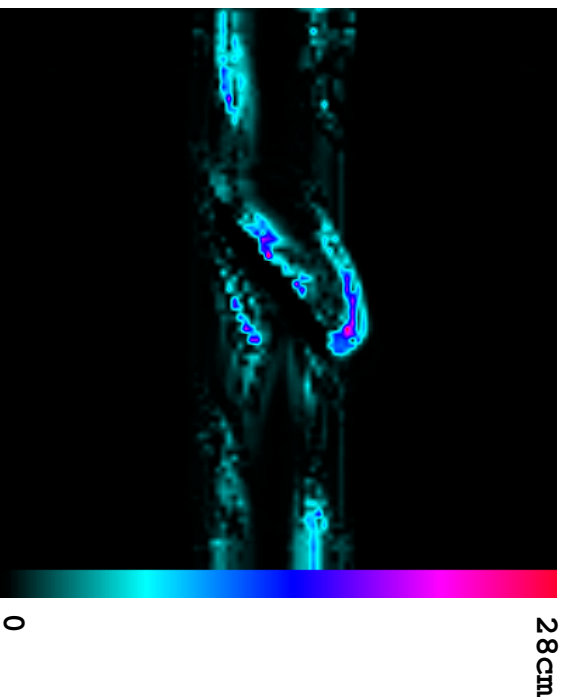
Quantité physique	Erreur moyenne : $\frac{1}{N} \sum  E $	
	Sans 4D-VAR	Avec 4D-VAR
Hauteur d'eau	12.0 cm	1.8 cm
Vitesse longitudinale	92 cm/s	44 cm/s
Vitesse transversale	21 cm/s	20 cm/s

La valeur initiale de la fonction coût était de 8.617 m<sup>2</sup>. Après les 3 itérations effectuée par la méthode de la plus profonde descente, la fonction coût avait une valeur de 2.124 m<sup>2</sup>, soit une diminution d'un facteur de 4.

Dans ce tableau, nous comparons les erreurs moyennes des points de grille entre les prédictions sans l'utilisation de la méthode du 4D-VAR et les prédictions avec l'utilisation de la méthode du 4D-VAR.

Sans la méthode du 4D-VAR, cette petite quantité d'eau ajoutée nous mène à une erreur moyenne de 12 cm. Cette erreur moyenne plus élevée que l'erreur originale de 4 cm est expliquée par l'accumulation de l'eau près du barrage et par le débet du contournement. Cela indique que la rivière est sensible à de petites fluctuations de son niveau d'eau. Avec la méthode du 4D-VAR, il y a tout de même une erreur de 1.8 cm mais celle-ci est plus petite que l'erreur initiale de 4 cm. En utilisant la méthode du 4D-VAR, nous avons réduit l'erreur d'un facteur de 6. La méthode du 4D-VAR s'est aperçue qu'il y avait une erreur dans les conditions initiales et a pu y apporter la correction nécessaire. La méthode du 4D-VAR a également réduit l'erreur sur les deux composantes de la vitesse.

Erreur dans la hauteur d'eau au temps final  
avec la méthode du 4D-VAR

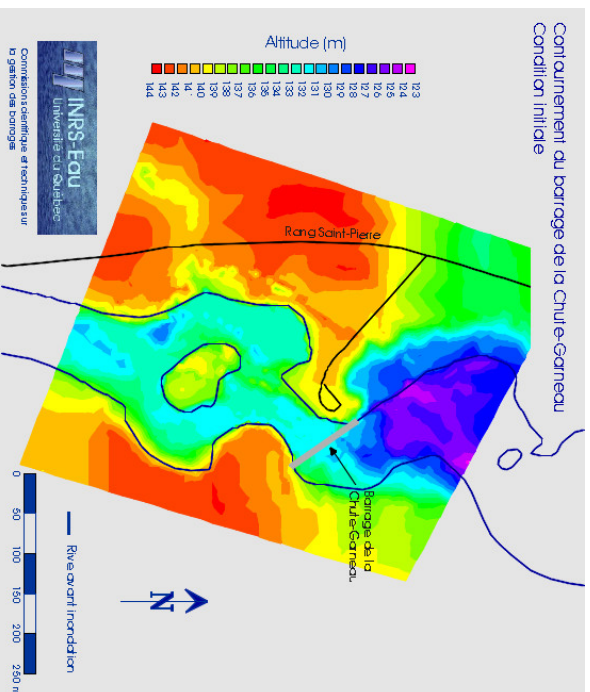


Cette photo montre l'erreur dans la hauteur d'eau. L'erreur est maximale pour la vague qui déborde sur la rive et le long du barrage. Également, l'erreur est plus grande le long de la rive comparativement au milieu de la rivière en raison de l'effet de l'érosion de la rive. On peut voir que l'erreur est minimale pour l'endroit où l'eau s'accumule ainsi qu'à l'entrée et la sortie de la rivière. La correction effectuée par la méthode du 4D-VAR a été efficace dans ces endroits critiques.

21-1

## 10 – Conclusion

- Le contournement d'un barrage pour un modèle simple a été simulé.
- La méthode 4D-VAR a été utilisée pour améliorer la prédiction.
- Travail en cours pour un cas plus réaliste : le contournement du barrage Chute-Garneau.



Référence : INRS-Eau [2],

<http://www.inrs-eau.quebec.ca/saguenay/index.html>

Durant cette présentation, nous avons recréé un contournement de barrage pour un modèle de rivière simplifié. Après avoir expliqué la méthode d'assimilation de données 4D-VAR, nous l'avons appliquée à notre modèle. Nous nous sommes aperçu que la méthode du 4D-VAR réduit effectivement l'erreur entre la prédiction et les observations. Par conséquent, la méthode du 4D-VAR s'avère un outil de choix dans la prévision de phénomènes naturels surtout pour les cas où les conditions initiales posent un problème. Néanmoins, il reste beaucoup de travail à accomplir pour se rapprocher de la réalité. Nous allons nous attaquer à un problème plus réaliste en considérant le contournement du barrage Chute-Garneau lors de l'événement du Saguenay.

Cette carte, qui provient de l'INRS-Eau, montre le barrage de Chute-Garneau juste avant le contournement. Le sens du courant va de haut en bas. Le barrage est ici et on remarque l'eau qui s'apprête à le contourner de ce côté. C'est sur cet exemple que nous allons diriger nos futures recherches.

## Références

- [1] G. R. Brooks and D. E. Lawrence, "Geomorphic effects of flooding along reaches of selected rivers in the Saguenay region, Québec, July 1996," *Géographie physique et Quaternaire*, vol. 54, no. 3, pp. 281–299, 2000.
- [2] INRS-Eau, "Simulation hydrodynamique et bilan sédimentaire des rivières chicoutimi et des Ha! Ha! suite aux crues exceptionnelles de juillet 1996," Jan. 1997. Rapport INRS-Eau No. R487, <http://www.inrs-eau.quebec.ca/saguenay/>.
- [3] R. Nicolet, L. Roy, R. Arès, J. Dufour, G. Marinier, and G. Morin, "Rapport : Commission scientifique et technique sur la gestion de barrages," tech. rep., Québec, 1997.
- [4] R. Daley, *Atmospheric Data Analysis*. Cambridge atmospheric and space science series, Cambridge : Cambridge University Press, 1991.
- [5] F.-X. Le Dimet and O. Talagrand, "Variational algorithms for analysis and assimilation of meteorological observations : theoretical aspects," *Tellus*, vol. 38A, pp. 97–110, 1986.
- [6] P. Courtier and O. Talagrand, "Variational assimilation of meteorological observations with the direct and adjoint shallow-water equations," *Tellus*, vol. 42A, pp. 531–549, 1990.
- [7] O. Talagrand and P. Courtier, "Variational assimilation of meteorological observations with the adjoint vorticity equation. I : Theory," *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, vol. 113, pp. 1311–1328, 1987.
- [8] M. Wenzel, *Adjoint Method (4D-VAR)*. The Alfred Wegener Institute Foundation for Polar and Marine Research, 2001. <http://e-net.awi-bremerhaven.de/Modelling/INVERSE/adjoint.html>.
- [9] R. M. Errico, "What is an adjoint model?," *Bulletin of the American Meteorological Society*, vol. 78, pp. 2577–2591, Nov. 1997.
- [10] S. M. Bhallamudi and M. H. Chaudhry, "Numerical modeling of aggradation and degradation in alluvial channels," *Journal of Hydraulic Engineering*, vol. 117, no. 9, pp. 1145–1164, 1991.
- [11] B. F. Sanders and N. D. Katopodes, "Adjoint sensitivity analysis for shallow-water wave

- control," *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 126, pp. 909–919, September 2000.
- [12] S. K. Nadarajah and A. Jameson, "A comparison of the continuous and discrete adjoint approach to automatic aerodynamic optimization," in *AIAA-2000-0667*, AIAA 38th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit,, (Reno, Nevada), Jan. 2000.
- [13] R. L. Burden and J. D. Faires, *Numerical Analysis*. Boston : PWS Publishing Company, 1993.
- [14] R. Sadourny, "The dynamics of finite-difference models of the shallow-water equations," *Journal of the Atmospheric Sciences*, vol. 32, pp. 680–689, April 1975.